Aufgabe: Erklären Sie Prinzip und Nutzen eines neuronalen Netzwerks.

Lösung: Ein neuronales Netzwerk ist eine lineare Abbildung von einem Zustandsvektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

zum gegenwärtigen Zeitpunkt auf einen Zustandsvektor

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$$

zu irgendeinem späteren oder zukünftigen Zeitpunkt. Sie wird durch die Gewichtsmatrix

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1j} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ w_{i1} & \cdots & w_{ij} & \cdots & w_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1} & \cdots & w_{mj} & \cdots & w_{mn} \end{pmatrix}$$

vermittelt. Dabei mag $\mathbf{x}$ allgemein über n Komponenten und $\mathbf{y}$ über m Komponenten verfügen. In Matrizenschreibweise ist diese Abbildung gegeben durch

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1j} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ w_{i1} & \cdots & w_{ij} & \cdots & w_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1} & \cdots & w_{mj} & \cdots & w_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Mit der Festsetzung

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \equiv -\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = -\mathbf{b}$$

stellt das lineare Gleichungssystem für $n > 3$ einen Satz von m Hyperebenen dar:[1]

$$\begin{aligned} &w_{11}x_1 + w_{12}x_2 + \ldots + w_{1n}x_n + b_1 = 0, \\ &w_{21}x_1 + w_{22}x_2 + \ldots + w_{2n}x_n + b_2 = 0, \\ &\vdots \\ &w_{m1}x_1 + w_{m2}x_2 + \ldots + w_{mn}x_n + b_m = 0. \end{aligned}$$

Das System ist eindeutig lösbar, wenn $\operatorname{Rg}(\mathbf{W},\mathbf{b}) = \operatorname{Rg}(\mathbf{W}) = n.$ Dann muß $\mathbf{W}$ eine n-reihige quadratische Matrix sein. Nur im Fall einer regulären Matrix ist die Abbildung invertierbar, d.h. $\mathbf{x} = \mathbf{W}^{-1}\mathbf{y}$, und wir können den Anfangszustand zur Erreichung des zukünftigen einstellen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1j} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ w_{i1} & \cdots & w_{ij} & \cdots & w_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nj} & \cdots & w_{nn} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Die Inverse der regulären Gewichtsmatrix ist dabei gegeben durch

$$\begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1j} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ w_{i1} & \cdots & w_{ij} & \cdots & w_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nj} & \cdots & w_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{W}} \begin{pmatrix} W_{11} & \cdots & W_{1j} & \cdots & W_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ W_{i1} & \cdots & W_{ij} & \cdots & W_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n1} & \cdots & W_{nj} & \cdots & W_{nn} \end{pmatrix}^{T},$$

mit den Adjunkten

$$W_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} w_{11} & \cdots & w_{i-1,j-1} & w_{i-1,j+1} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_{i-1,1} & \cdots & w_{i-1,j-1} & w_{i-1,j+1} & \cdots & w_{i-1,n} \\ w_{i+1,1} & \cdots & w_{i+1,j-1} & w_{i+1,j+1} & \cdots & w_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{i-1,j-1} & w_{i-1,j+1} & \cdots & w_{nn} \end{vmatrix}.$$

[1] Die Gerade stellt in zwei Dimensionen den Sonderfall einer Ebene dar.

Damit folgt explizit

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{W}} \begin{pmatrix} W_{11} & \cdots & W_{i1} & \cdots & W_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ W_{1j} & \cdots & W_{ij} & \cdots & W_{nj} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{1n} & \cdots & W_{in} & \cdots & W_{nn} \end{pmatrix}$$

mit

$$\det \mathbf{W} = \begin{vmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1j} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ w_{i1} & \cdots & w_{ij} & \cdots & w_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nj} & \cdots & w_{nn} \end{vmatrix}.$$

Die Lösungen des Anfangsvektors lauten

$$x_j = \frac{1}{\det \mathbf{W}} \left(W_{1j} y_1 + W_{2j} y_2 + \ldots + W_{nj} y_n \right) = \frac{1}{\det \mathbf{W}} \begin{vmatrix} w_{11} & \cdots & y_1 & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ w_{i1} & \cdots & y_i & \cdots & w_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & y_n & \cdots & w_{nn} \end{vmatrix}.$$

In den meisten kinematisch einfach zu beschreibenden Fällen kommen wir mit maximal 3 Dimensionen aus. Im zweidimensionalen Fall erhalten wir z.B. für

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{pmatrix}$$

die Inverse

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{W}} \begin{pmatrix} W_{11} & W_{21} \\ W_{12} & W_{22} \end{pmatrix},$$

wobei

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{W}} \begin{pmatrix} W_{11} & W_{21} \\ W_{12} & W_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \mathbf{W}} \begin{pmatrix} w_{22} & -w_{12} \\ -w_{21} & w_{11} \end{pmatrix},$$

während die Determinante gegeben ist durch

$$\det \mathbf{W} = \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{vmatrix} = w_{11} w_{22} - w_{21} w_{12}.$$

Die Lösungen des Anfangsvektors lauten

$$x_1 = \frac{1}{\det \mathbf{W}}\left(W_{11}y_1 + W_{21}y_2\right) = \frac{1}{w_{11}w_{22} - w_{21}w_{12}}\begin{vmatrix} y_1 & w_{12} \\ y_2 & w_{22} \end{vmatrix} = \frac{y_1 w_{22} - y_2 w_{12}}{w_{11}w_{22} - w_{21}w_{12}}$$

und

$$x_2 = \frac{1}{\det \mathbf{W}}\left(W_{12}y_1 + W_{22}y_2\right) = \frac{1}{w_{11}w_{22} - w_{21}w_{12}}\begin{vmatrix} w_{11} & y_1 \\ w_{21} & y_2 \end{vmatrix} = \frac{y_2 w_{11} - y_1 w_{21}}{w_{11}w_{22} - w_{21}w_{12}}.$$

In drei Dimensionen errechnen wir für

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{pmatrix}$$

die Inverse

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{W}}\begin{pmatrix} W_{11} & W_{21} & W_{31} \\ W_{12} & W_{22} & W_{32} \\ W_{13} & W_{23} & W_{33} \end{pmatrix},$$

wobei

$$\mathbf{W}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{W}}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} w_{22} & w_{23} \\ w_{32} & w_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} w_{12} & w_{13} \\ w_{32} & w_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} w_{12} & w_{13} \\ w_{22} & w_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} w_{21} & w_{23} \\ w_{31} & w_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} w_{11} & w_{13} \\ w_{31} & w_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} w_{11} & w_{13} \\ w_{21} & w_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} w_{21} & w_{22} \\ w_{31} & w_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{31} & w_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Die Determinante lautet

$$\begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{vmatrix} = w_{11}w_{22}w_{33} + w_{12}w_{23}w_{31} + w_{13}w_{21}w_{32} - w_{31}w_{22}w_{13} - w_{32}w_{23}w_{11} - w_{33}w_{21}w_{12}.$$

Damit erhalten wir die Lösungen

$$x_1 = \frac{1}{\det \mathbf{W}}\left(W_{11}y_1 + W_{21}y_2 + W_{31}y_3\right) = \frac{1}{\det \mathbf{W}}\begin{vmatrix} y_1 & w_{12} & w_{13} \\ y_2 & w_{22} & w_{23} \\ y_3 & w_{32} & w_{33} \end{vmatrix},$$

$$x_2 = \frac{1}{\det \mathbf{W}}\left(W_{12}y_1 + W_{22}y_2 + W_{32}y_3\right) = \frac{1}{\det \mathbf{W}}\begin{vmatrix} w_{11} & y_1 & w_{13} \\ w_{21} & y_2 & w_{23} \\ w_{31} & y_3 & w_{33} \end{vmatrix},$$

$$x_3 = \frac{1}{\det \mathbf{W}}\left(W_{13}y_1 + W_{23}y_2 + W_{33}y_3\right) = \frac{1}{\det \mathbf{W}}\begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} & y_1 \\ w_{21} & w_{22} & y_2 \\ w_{31} & w_{32} & y_3 \end{vmatrix}.$$

Das Prinzip des neuronalen Netzwerks läßt sich leicht auf Matrizen ausdehnen. Ist etwa eine Zielmatrix durch

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1j} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ y_{i1} & \cdots & y_{ij} & \cdots & y_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nj} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}$$

gegeben, wobei die Spaltenvektoren gleich den Soll-Zustandsvektoren sind, i.e.

$$\mathbf{y}_j = \begin{pmatrix} y_{1j} \\ \vdots \\ y_{ij} \\ \vdots \\ y_{nj} \end{pmatrix},$$

dann lassen sich auch die Zustandsvektoren des Anfangszustands in einer Zustandsmatrix

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

erfassen. Ihre Spaltenvektoren

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_{j1} \\ \vdots \\ x_{ij} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$$

beschreiben den Anfangszeitpunkt. Die Gewichtsmatrix

$$\mathbf{W}=\begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1j} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ w_{i1} & \cdots & w_{ij} & \cdots & w_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nj} & \cdots & w_{nn} \end{pmatrix}$$

bleibt dabei unverändert. In Matrizenschreibweise ist die Lösung der Abbildung $\mathbf{Y}=\mathbf{WX}$ durch ebendieselbe Inverse wie für den einzelnen Zustandsvektor gegeben:

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1j} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ x_{i1} & \cdots & x_{ij} & \cdots & x_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nj} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} w_{11} & \cdots & w_{1j} & \cdots & w_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ w_{i1} & \cdots & w_{ij} & \cdots & w_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{n1} & \cdots & w_{nj} & \cdots & w_{nn} \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1j} & \cdots & y_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ y_{i1} & \cdots & y_{ij} & \cdots & y_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & \cdots & y_{nj} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix}.$$

Wenn man also die Zukunft (entweder rechnerisch oder durch evolutionäres Training) kennt und gezielt herbeiführen will, so ist dafür ein neuronales Netzwerk bestens geeignet. Es hat den Vorteil, daß man die explizite und meist komplexe Zeitabhängigkeit nicht zu wissen braucht, sondern nur jeweils Anfangs- und Endzustand kennen muß. Der Zielvektor muß ein tatsächlich stattfindendes Erfolgsereignis[2] oder -erlebnis beschreiben. Das kann ein eigener Vorteil sein oder ein Nachteil des Gegners oder Mitbewerbers. In jedem Fall muß das Ereignis eintreten, aber das kann trainiert werden. Das Ergebnis dieses Trainings ist die Gewichtsmatrix. Weichen die Werte, die das System zwischen Anfangs- und Endzustand einnimmt, temporär voneinander ab, kann man die Gewichte durch ein sogenanntes Gradientenabstiegsverfahren korrigieren. Hält man die Differenz zwischen Soll- und Ist-Zustand durch ein konvergentes Verfahren wie die Backpropagation konstant auf null, nähert man sich im Lauf der Zeit unweigerlich dem Erfolgsereignis.

[2] Im Sinne von Überleben

