Aufgabe: Zeigen Sie, wie man mit Hilfe von künstlicher Intelligenz einen Börsencrash herbeiführen und die Weltwirtschaft in die Nähe eines Kollaps bringen kann.

Lösung: Der Geldverkehr wird heutzutage hauptsächlich über Banken abgewickelt. An den Kapitalmärkten geht es oft steil bergauf und bergab, weil ein vorübergehend abgeschlossenes System nur durch Umverteilung des Kapitals stabil bleiben kann. Die Geldmenge ist also über einen gewissen Zeitraum konstant, so daß man aufgrund der Transaktionen der Banken untereinander und der Kapitalstände der jeweiligen Gläubiger und Schuldner die zukünftige Entwicklung der Märkte vorhersagen kann, d.h. man ist in der Lage, Gewinner und Verlierer zu identifizieren. Jedes Geldinstitut und alle Unternehmen sind in einem riesigen Geflecht von Hin- und Herüberweisungen miteinander vernetzt, womit sich auch die Kapitalstände aufgrund von Gewinnern und Verlierern fortlaufend ändern. Zu diesem ganzen Netzwerk zählen auch noch die vielen kleinen Anleger, die gewinnträchtige Aktien kaufen und andere abstoßen. Physikalisch gesehen sind sämtliche n Teilnehmer am Kapitalmarkt durch ein lineares System von n Kontinuitätsgleichungen miteinander gekoppelt:

$$\begin{aligned}
\dot{N}_1 &= k_{11}N_1 + \ldots + k_{1j}N_j + \ldots + k_{1n}N_n, \\
&\vdots \\
\dot{N}_i &= k_{i1}N_1 + \ldots + k_{ij}N_j + \ldots + k_{in}N_n, \\
&\vdots \\
\dot{N}_n &= k_{n1}N_1 + \ldots + k_{nj}N_j + \ldots + k_{nn}N_n,
\end{aligned}$$

wobei die Kapitalstände N_i mit gewissen Transaktionsraten k_{ij} untereinander verknüpft sind. Die gesamte Geldmenge N bleibe nach dem Gesagten über eine gewisse Zeitspanne konstant:

$$N = \sum_{i=1}^{n} N_i .$$

Die zeitlichen Änderungen der Kapitalstände jedes einzelnen sind also die Summe aller ein- und ausgehenden Zahlungen,

$$\dot{N}_i = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} N_j ,$$

und aus Symmetriegründen ist $k_{ij} = -k_{ji}$. Aufgrund der riesigen Teilnehmerzahlen und der Unkenntnis der jeweiligen Kapitalstände ist ein solches System kaum überschaubar und für den Einzelnen auch keineswegs transparent, so daß man an der Börse durchaus seine blauen Wunder erleben kann. Dementsprechend stellt sich für den Anleger die Frage, wo er Gewinne mitnehmen kann und welche Aktien er verkaufen muß. Es heißt, an den Börsen gebe es kein System, mit dem sich dauerhaft Gewinne erzielen ließen. Das stimmt nur bedingt und ist darauf zurückzuführen, daß uns die Anfangsbedingungen unserer Trendrechnung nicht präzise vorliegen. Wie schwierig exakte Vorhersagen sind, zeigt sich bereits an einem System mit nur drei Playern:

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= k_{11}N_1 + k_{12}N_2 + k_{13}N_3,\\ \dot{N}_2 &= k_{21}N_1 + k_{22}N_2 + k_{23}N_3,\\ \dot{N}_3 &= k_{31}N_1 + k_{32}N_2 + k_{33}N_3,\end{aligned}$$

das wir nachfolgend „klassisch“ lösen wollen. Zunächst können die Raten sowohl positiv als auch negativ sein, wobei wir positive Größen den Gewinnen zuordnen, negative den Verlusten. Die Geldmengen selbst können allerdings nicht negativ werden, denn es gilt $N_i \geq 0$ für $i = 1, 2, 3$ und in der Summe

$$N_1 + N_2 + N_3 = N.$$

Aus Symmetriegründen ist

$$k_{13} = -k_{31}, \quad k_{21} = -k_{12}, \quad k_{32} = -k_{23},$$

womit die Gleichungen folgende Form annehmen:

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= k_{11}N_1 + k_{12}N_2 - k_{31}N_3\\ \dot{N}_2 &= -k_{12}N_1 + k_{22}N_2 + k_{23}N_3\\ \dot{N}_3 &= k_{31}N_1 - k_{23}N_2 + k_{33}N_3\end{aligned}$$

Weitere Vereinfachungen können getroffen werden, dadurch daß

$$\dot{N} = \dot{N}_1 + \dot{N}_2 + \dot{N}_3 = 0,$$

und zwar können wegen

$$(k_{11} - k_{12} + k_{31})N_1 + (k_{12} + k_{22} - k_{23})N_2 + (-k_{31} + k_{23} + k_{33})N_3 = 0$$

drei der Koeffizienten eliminiert werden:

$$k_{11} = k_{12} - k_{31}, \quad k_{22} = k_{23} - k_{12}, \quad k_{33} = k_{31} - k_{23},$$

wobei deren Summe gleich null ist:

$$k_{11} + k_{22} + k_{33} = 0.$$

Eliminieren wir die entsprechenden Raten, erhalten wir über den Zwischenschritt

$$\begin{aligned}\dot{N}_1 &= (k_{12} - k_{31})N_1 + k_{12}N_2 - k_{31}N_3,\\ \dot{N}_2 &= -k_{12}N_1 + (k_{23} - k_{12})N_2 + k_{23}N_3,\\ \dot{N}_3 &= k_{31}N_1 - k_{23}N_2 + (k_{31} - k_{23})N_3\end{aligned}$$

das folgende gekoppelte Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten:

$$-\frac{d}{dt}(N_2+N_3)=k_{12}(N_1+N_2)-k_{31}(N_3+N_1),$$
$$-\frac{d}{dt}(N_3+N_1)=-k_{12}(N_1+N_2)+k_{23}(N_2+N_3),$$
$$-\frac{d}{dt}(N_1+N_2)=k_{31}(N_1+N_3)-k_{23}(N_2+N_3).$$

Mit den Substitutionen

$$X_1\equiv N_1+N_2,\quad X_2\equiv N_2+N_3,\quad X_3\equiv N_3+N_1,$$

wobei

$$X_1+X_2+X_3=2N\quad\text{und}\quad \dot{X}_1+\dot{X}_2+\dot{X}_3=0,$$

transformieren wir das ursprüngliche System in das folgende einfacher zu lösende Differentialgleichungssystem

$$\dot{X}_1=k_{23}X_2-k_{31}X_3,$$
$$\dot{X}_2=k_{31}X_3-k_{12}X_1,$$
$$\dot{X}_3=k_{12}X_1-k_{23}X_2,$$

das wir übersichtlicher in Matrixdarstellung schreiben können:

$$\begin{pmatrix}\dot{X}_1\\ \dot{X}_2\\ \dot{X}_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k_{23} & -k_{31}\\ -k_{12} & 0 & k_{31}\\ k_{12} & -k_{23} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{pmatrix}.$$

In Vektornotation

$$\dot{\mathbf{X}}=\begin{pmatrix}\dot{X}_1\\ \dot{X}_2\\ \dot{X}_3\end{pmatrix},\quad \mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & k_{23} & -k_{31}\\ -k_{12} & 0 & k_{31}\\ k_{12} & -k_{23} & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{X}=\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\\ X_3\end{pmatrix}$$

ergibt sich die einfache Abbildung

$$\dot{\mathbf{X}}=\mathbf{AX},$$

wobei die Rücktransformation gegeben ist durch

$$N_1=X_1+X_3-N,$$
$$N_2=X_1+X_2-N,$$
$$N_3=X_2+X_3-N.$$

Die Eigenwerte dieser Abbildung erhalten wir mit Hilfe der Wronskischen Determinante

$$\begin{vmatrix} -\lambda & k_{23} & -k_{31} \\ -k_{12} & -\lambda & k_{31} \\ k_{12} & -k_{23} & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

aus dem charakteristischen Polynom:

$$\lambda^3 + k^2\lambda = \left(\lambda^2 + k^2\right)\lambda = 0,$$

wobei $k \equiv \sqrt{k_{12}k_{23} + k_{23}k_{31} + k_{31}k_{12}}$. Die Gleichung

$$\lambda^2 + k^2 = 0$$

hat die beiden konjugiert-komplexen Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \pm ik$$

zuzüglich zum reellen Eigenwert $\lambda_3 = 0,$ der sich auf eine Konstante beläuft. Die Eigenvektoren finden wir, indem wir den Ansatz

$$\mathbf{X} = e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} A_1 t + A_2 \\ B_1 t + B_2 \\ C_1 t + C_2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\dot{\mathbf{X}} = \lambda_1 e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} A_1 t + A_2 \\ B_1 t + B_2 \\ C_1 t + C_2 \end{pmatrix} + e^{\lambda_1 t}\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix}$$

wählen. In die Differentialgleichung eingesetzt,

$$\lambda_1\begin{pmatrix} A_1 t + A_2 \\ B_1 t + B_2 \\ C_1 t + C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & k_{23} & -k_{31} \\ -k_{12} & 0 & k_{31} \\ k_{12} & -k_{23} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 t + A_2 \\ B_1 t + B_2 \\ C_1 t + C_2 \end{pmatrix},$$

erhalten wir durch Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} ikA_1 t + A_1 + ikA_2 &= \left(k_{23}B_1 - k_{31}C_1\right)t + k_{23}B_2 - k_{31}C_2, \\ ikB_1 t + B_1 + ikB_2 &= \left(k_{31}C_1 - k_{12}A_1\right)t + k_{31}C_2 - k_{12}A_2, \\ ikC_1 t + C_1 + ikC_2 &= \left(k_{12}A_1 - k_{23}B_1\right)t + k_{12}A_2 - k_{23}B_2. \end{aligned}$$

Mit der Wahl zweier Konstanten C_1 und C_2 können wir die restlichen Amplituden wie folgt ausdrücken:

$$A_1 = -\frac{k_{23}-ik}{k^2-k_{12}k_{23}}k_{31}C_1,\quad A_2 = -\frac{k_{23}-ik}{k^2-k_{12}k_{23}}k_{31}C_2 - \frac{k^2+k_{12}k_{23}+2ikk_{23}}{\left(k^2-k_{12}k_{23}\right)^2}k_{31}C_1,$$
$$B_1 = -\frac{k_{12}+ik}{k^2-k_{12}k_{23}}k_{31}C_1,\quad B_2 = -\frac{k_{12}+ik}{k^2-k_{12}k_{23}}k_{31}C_2 + \frac{k^2+k_{12}k_{23}-2ikk_{12}}{\left(k^2-k_{12}k_{23}\right)^2}k_{31}C_1.$$

Damit lautet der allgemeine Lösungsvektor

$$X_1 = \left[-\frac{k_{23}-ik}{k^2-k_{12}k_{23}}t - \frac{k^2+k_{12}k_{23}+2ikk_{23}}{\left(k^2-k_{12}k_{23}\right)^2}\right]k_{31}C_1e^{ikt} - \frac{k_{23}-ik}{k^2-k_{12}k_{23}}k_{31}C_2e^{ikt},$$
$$X_2 = \left[-\frac{k_{12}+ik}{k^2-k_{12}k_{23}}t + \frac{k^2+k_{12}k_{23}+2ikk_{12}}{\left(k^2-k_{12}k_{23}\right)^2}\right]k_{31}C_1e^{ikt} - \frac{k_{12}+ik}{k^2-k_{12}k_{23}}k_{31}C_2e^{ikt},$$
$$X_3 = tC_1e^{ikt} + C_2e^{ikt}.$$

Es ergeben sich daraus die ursprünglichen Lösungen zu

$$N_1 = N - X_2 = \left[\frac{k_{12}+ik}{k^2-k_{12}k_{23}}t - \frac{k^2+k_{12}k_{23}+2ikk_{12}}{\left(k^2-k_{12}k_{23}\right)^2}\right]k_{31}C_1e^{ikt} + \frac{k_{12}+ik}{k^2-k_{12}k_{23}}k_{31}C_2e^{ikt} + N,$$
$$N_2 = N - X_3 = \left[-\frac{k_{12}+k_{23}}{k^2-k_{12}k_{23}}t + \frac{2ik\left(k_{12}-k_{23}\right)}{\left(k^2-k_{12}k_{23}\right)^2}\right]k_{31}C_1e^{ikt} - \frac{k_{12}+k_{23}}{k^2-k_{12}k_{23}}k_{31}C_2e^{ikt} - N,$$
$$N_3 = N - X_1 = \left[\frac{k_{23}-ik}{k^2-k_{12}k_{23}}t + \frac{k^2+k_{12}k_{23}+2ikk_{23}}{\left(k^2-k_{12}k_{23}\right)^2}\right]k_{31}C_1e^{ikt} + \frac{k_{23}-ik}{k^2-k_{12}k_{23}}k_{31}C_2e^{ikt} + N.$$

Die beiden linear unabhängigen Lösungsvektoren der beiden Fundamentalsysteme sind gegeben durch

$$\Re\left(N_1\right) = \frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\left\{\left[k_{12}t - \frac{k^2+k_{12}k_{23}}{k^2-k_{12}k_{23}}\right]\cos kt - kt\sin kt + \frac{2kk_{12}}{k^2-k_{12}k_{23}}\sin kt\right\}$$
$$+ \frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}\left(k_{12}\cos kt - k\sin kt\right) + N,$$

$$\Re\left(N_2\right) = \frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\left[-\left(k_{12}t + k_{23}t\right)\cos kt - \frac{2kk_{12}}{k^2-k_{12}k_{23}}\sin kt + \frac{2kk_{23}}{k^2-k_{12}k_{23}}\sin kt\right]$$
$$- \frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}\left(k_{12}\cos kt + k_{23}\cos kt\right) - N,$$

$$\Re\left(N_3\right) = \frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\left\{\left[k_{23}t + \frac{k^2+k_{12}k_{23}}{k^2-k_{12}k_{23}}\right]\cos kt + kt\sin kt - \frac{2kk_{23}}{k^2-k_{12}k_{23}}\sin kt\right\}$$
$$+ \frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}\left(k_{23}\cos kt + k\sin kt\right) + N$$

und

$$\Im(N_1)=\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\left\{\left[k_{12}t-\frac{k^2+k_{12}k_{23}}{k^2-k_{12}k_{23}}\right]\sin kt+\left[kt-\frac{2kk_{12}}{k^2-k_{12}k_{23}}\right]\cos kt\right\}$$
$$+\frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}\left(k_{12}\sin kt+k\cos kt\right),$$

$$\Im(N_2)=\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\left[-\left(k_{12}t+k_{23}t\right)\sin kt+\frac{2k\left(k_{12}-k_{23}\right)}{k^2-k_{12}k_{23}}\cos kt\right]-\frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}\left(k_{12}+k_{23}\right)\sin kt,$$

$$\Im(N_3)=\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\left\{\left[k_{23}t+\frac{k^2+k_{12}k_{23}}{k^2-k_{12}k_{23}}\right]\sin kt+\left[-kt+\frac{2kk_{23}}{k^2-k_{12}k_{23}}\right]\cos kt\right\}$$
$$+\frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}\left(k_{23}\sin kt-k\cos kt\right).$$

Für den Realteil lautet der Lösungsvektor

$$N_1(t)=\left\{\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\left[k_{12}t-\frac{k^2+k_{12}k_{23}}{k^2-k_{12}k_{23}}\right]+\frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}k_{12}\right\}\cos kt$$
$$-\left\{\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\left[kt-\frac{2kk_{12}}{k^2-k_{12}k_{23}}\right]+\frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}k\right\}\sin kt+N,$$

$$N_2(t)=-\left\{\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\left[\left(k_{12}t+k_{23}t\right)\right]+\frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}\left(k_{12}+k_{23}\right)\right\}\cos kt-N$$
$$-\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\left[\frac{2kk_{12}}{k^2-k_{12}k_{23}}-\frac{2kk_{23}}{k^2-k_{12}k_{23}}\right]\sin kt,$$

$$N_3(t)=N+\left\{\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\left[k_{23}t+\frac{k^2+k_{12}k_{23}}{k^2-k_{12}k_{23}}\right]+\frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}k_{23}\right\}\cos kt$$
$$+\left\{\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\left[kt-\frac{2kk_{23}}{k^2-k_{12}k_{23}}\right]+\frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}k\right\}\sin kt.$$

An der Stelle $t=0$ erhalten wir die folgenden Amplituden:

$$N_1(0)=N-\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\frac{k^2+k_{12}k_{23}}{k^2-k_{12}k_{23}}+\frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}k_{12},$$
$$N_2(0)=-N-\frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}\left(k_{12}+k_{23}\right),$$
$$N_3(0)=N+\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\frac{k^2+k_{12}k_{23}}{k^2-k_{12}k_{23}}+\frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}k_{23}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt sofort die zweite Konstante:

$$\frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}=-\frac{N+N_2(0)}{k_{12}+k_{23}}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die beiden anderen Gleichungen ein, erhalten wir die erste Konstante:

$$\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}=\frac{k^2-k_{12}k_{23}}{k^2+k_{12}k_{23}}\left[N_2(0)+N_3(0)-k_{12}\frac{N+N_2(0)}{k_{12}+k_{23}}\right]$$
$$=-\frac{k^2-k_{12}k_{23}}{k^2+k_{12}k_{23}}\left[N_1(0)+N_2(0)-k_{23}\frac{N+N_2(0)}{k_{12}+k_{23}}\right].$$

Daraus folgen die endgültigen Lösungen

$$N_1(t)=N+\left\{-\left[N_1(0)+N_2(0)-k_{23}\frac{N+N_2(0)}{k_{12}+k_{23}}\right]\frac{k^2-k_{12}k_{23}}{k^2+k_{12}k_{23}}k_{12}t+N_1(0)-N\right\}\cos kt$$
$$+\left\{\left[N_1(0)+N_2(0)-k_{23}\frac{N+N_2(0)}{k_{12}+k_{23}}\right]\left[\frac{k^2-k_{12}k_{23}}{k^2+k_{12}k_{23}}kt-\frac{2kk_{12}}{k^2+k_{12}k_{23}}\right]+\frac{N+N_2(0)}{k_{12}+k_{23}}k\right\}\sin kt,$$

$$N_2(t)=\left\{\left[N_1(0)+N_2(0)-k_{23}\frac{N+N_2(0)}{k_{12}+k_{23}}\right]\frac{k^2-k_{12}k_{23}}{k^2+k_{12}k_{23}}(k_{12}t+k_{23}t)+N+N_2(0)\right\}\cos kt$$
$$+\left[N_1(0)+N_2(0)-k_{23}\frac{N+N_2(0)}{k_{12}+k_{23}}\right]\left[\frac{2kk_{12}}{k^2+k_{12}k_{23}}-\frac{2kk_{23}}{k^2+k_{12}k_{23}}\right]\sin kt-N,$$

$$N_3(t)=N+\left\{-\left[N_1(0)+N_2(0)-k_{23}\frac{N+N_2(0)}{k_{12}+k_{23}}\right]\frac{k^2-k_{12}k_{23}}{k^2+k_{12}k_{23}}k_{23}t-N_1(0)-N_2(0)\right\}\cos kt$$
$$+\left\{\left[N_1(0)+N_2(0)-k_{23}\frac{N+N_2(0)}{k_{12}+k_{23}}\right]\left[-\frac{k^2-k_{12}k_{23}}{k^2+k_{12}k_{23}}kt+\frac{2kk_{23}}{k^2+k_{12}k_{23}}\right]-\frac{N+N_2(0)}{k_{12}+k_{23}}k\right\}\sin kt.$$

Wie man leicht sieht, ist

$$N_1(t)+N_2(t)+N_3(t)=N,$$

da die Sinus- und Kosinusterme identisch verschwinden. Mit dem Imaginärteil verfahren wir genauso. Es ergibt sich folgender Lösungsvektor:

$$N_1(t)=\left\{\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\left[k_{12}t-\frac{k^2+k_{12}k_{23}}{k^2-k_{12}k_{23}}\right]+\frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}k_{12}\right\}\sin kt$$
$$+\left\{\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\left[kt-\frac{2kk_{12}}{k^2-k_{12}k_{23}}\right]+\frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}k\right\}\cos kt,$$

$$N_2(t)=\left\{-\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}(k_{12}t+k_{23}t)-\frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}(k_{12}+k_{23})\right\}\sin kt$$
$$+\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\frac{2k(k_{12}-k_{23})}{k^2-k_{12}k_{23}}\cos kt,$$

$$N_3(t)=\left\{\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\left[k_{23}t+\frac{k^2+k_{12}k_{23}}{k^2-k_{12}k_{23}}\right]+\frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}k_{23}\right\}\sin kt$$
$$+\left\{\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\left[-kt+\frac{2kk_{23}}{k^2-k_{12}k_{23}}\right]-\frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}k\right\}\cos kt.$$

Die Amplituden sind wiederum gegeben durch

$$N_1(0)=-\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\frac{2kk_{12}}{k^2-k_{12}k_{23}}+\frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}k,$$
$$N_2(0)=\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\frac{2k(k_{12}-k_{23})}{k^2-k_{12}k_{23}},$$
$$N_3(0)=\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}\frac{2kk_{23}}{k^2-k_{12}k_{23}}-\frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}k.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt sofort die erste Konstante:

$$\frac{k_{31}C_1}{k^2-k_{12}k_{23}}=\frac{N_2(0)}{2k}\frac{k^2-k_{12}k_{23}}{k_{12}-k_{23}}.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die beiden anderen Gleichungen ein, erhalten wir

$$\frac{k_{31}C_2}{k^2-k_{12}k_{23}}=\frac{N_1(0)}{k}+\frac{N_2(0)}{k}\frac{k_{12}}{k_{12}-k_{23}}=-\frac{N_3(0)}{k}+\frac{N_2(0)}{k}\frac{k_{23}}{k_{12}-k_{23}}.$$

Damit lauten die Lösungen des zweiten Fundamentalsystems:

$$N_1(t)=\left\{k_{12}N_2(0)\frac{k^2-k_{12}k_{23}}{k_{12}-k_{23}}\frac{t}{2}-\frac{N_2(0)}{2}\frac{k^2+k_{12}k_{23}}{k_{12}-k_{23}}+k_{12}\left[N_1(0)+\frac{k_{12}N_2(0)}{k_{12}-k_{23}}\right]\right\}\frac{\sin kt}{k}$$
$$+\left\{N_1(0)+N_2(0)\frac{k^2-k_{12}k_{23}}{k_{12}-k_{23}}\frac{t}{2}\right\}\cos kt,$$

$$N_2(t)=\left\{-(k_{12}+k_{23})N_2(0)\frac{k^2-k_{12}k_{23}}{k_{12}-k_{23}}\frac{t}{2}-(k_{12}+k_{23})\left[N_1(0)+\frac{k_{12}N_2(0)}{k_{12}-k_{23}}\right]\right\}\frac{\sin kt}{k}$$
$$+N_2(0)\cos kt,$$

$$N_3(t)=\left\{k_{23}N_2(0)\frac{k^2-k_{12}k_{23}}{k_{12}-k_{23}}\frac{t}{2}+\frac{N_2(0)}{2}\frac{k^2+k_{12}k_{23}}{k_{12}-k_{23}}+k_{23}\left[N_1(0)+\frac{k_{12}N_2(0)}{k_{12}-k_{23}}\right]\right\}\frac{\sin kt}{k}$$
$$+\left\{N_3(0)-N_2(0)\frac{k^2-k_{12}k_{23}}{k_{12}-k_{23}}\frac{t}{2}\right\}\cos kt.$$

Beide erfüllen die Anfangsbedingungen

$$\dot N_1(0)=k_{12}(N_1(0)+N_2(0))-k_{31}(N_1(0)+N_3(0)),$$
$$\dot N_2(0)=-k_{12}(N_1(0)+N_2(0))+k_{23}(N_2(0)+N_3(0)),$$
$$\dot N_3(0)=-k_{23}(N_2(0)+N_3(0))+k_{31}(N_1(0)+N_3(0)).$$

Wenn auch nur eine Rate bekannt ist, z.B. $k_{31} = C,$ können alle anderen daraus berechnet werden:

$$k_{12} = \frac{\dot{N}_1(0) + C(N_1(0) + N_3(0))}{N_1(0) + N_2(0)},$$
$$k_{23} = \frac{C(N_1(0) + N_3(0)) - \dot{N}_3(0)}{N_2(0) + N_3(0)}$$

usw. Wie wir nunmehr gesehen haben, sind solche Gleichungssysteme nicht einfach durch gewöhnliche Matrizenoperationen zu lösen. Abhilfe schafft hier ein neuronales Netzwerk, das wir im vorliegenden Fall graphisch wie in Abb. 1 mit drei Eingangs- und Ausgangsneuronen und neun Gewichten ansetzen. Erhöhen wir die Zahl der Neuronen, nimmt die Zahl der Gewichte quadratisch zu. Der Leistungsfähigkeit solcher Netze sind theoretisch kaum Grenzen gesetzt.

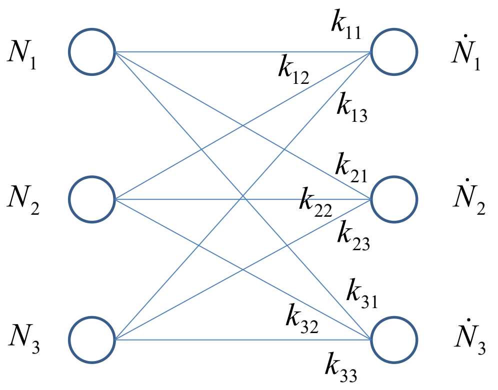

Abbildung 1. Einfaches neuronales Netzwerk mit drei Eingabe- und drei Ausgabeneuronen

Man muß dieses System einmal mit den entsprechenden Kapitalständen sowie den zugehörigen Transaktionsraten trainiert haben, um zu wissen, wer die Gewinner und die Verlierer waren. In der Annahme, daß sich die Raten nicht so schnell ändern, weil ein Unternehmen nicht eben kurzfristig auf Wachstumskurs ist oder Verluste einfährt, sondern längerfristig, frieren wir die Gewichte ein und können dann aufgrund sich ändernder Kapitalstände die Gewinner und Verlierer der nächsten Runde vorhersagen. Wir können dieses System auf beliebig viele Player ausdehnen, ja das müssen wir sogar, um die Märkte vollständig zu erfassen. Es wird dabei sofort klar, daß man bei der klassischen Lösung der Differentialgleichungen irgendwann an seine Grenzen stößt, da kein Mensch in der Lage ist, die Lösungen eines linearen Differentialgleichungssystems erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten analytisch sauber auf höherdimensionale Zustandsvektoren auszuweiten. Ein dreidimensionales System bleibt noch halbwegs überschaubar, aber bereits bei 5 Dimensionen stoßen selbst Könner an ihre Grenzen. Hier zeigt sich nun, worin der Wert neuronaler Netze besteht, und zwar in der Größenordnung, um die es hier geht. Derartige Verflechtungen des Kapitalgeschehens sind selbst für erfahrene Börsianer kaum überschaubar. Besäße man alle Informationen ganz genau, würde man in seinen Prognosen eine hohe Zuverlässigkeitsrate erreichen. Noch schwieriger werden die Prognosen, wenn die Geldmenge selbst erhöht wird, da die Kontinuitätsgleichung davon ausgeht, daß sie konstant bleibt. Daher müssen periodisch Updates gezogen werden, damit zumindest über einen quasistationären Zeitraum die Raten eingefroren werden können. Ein neuronales Netzwerk ist nur so gut wie die Informationen, mit denen es versorgt wird, es kann keine Wunder vollbringen.

Zum Abschluß noch ein Gedanke, wie künstliche Intelligenz zum Schaden anderer eingesetzt werden kann. Angenommen, ein sehr gut trainiertes neuronales Netzwerk würde jedermann zur Verfügung stehen. Dann würden die Börsianer alle gleichzeitig auf genau dieselben Aktien setzen, welche vom System als gewinnträchtig ausgegeben wurden, und die ursprünglich stabilen Wachstums- oder Verlustraten würden damit negativ beeinflußt. Es würden sogenannte Blasen entstehen, weil die Unternehmen mangels Kapazitätsgrenzen kurzfristig gar nicht das leisten könnten, was die Aktionäre von ihnen erwarten. Es könnte also genau das Gegenteil von dem eintreten, was sich bei einer gesunden Unternehmensentwicklung abzeichnen würde. Die Ängste über die Unsicherheiten würden den Anleger zusätzlich vergraulen. Nicht zuletzt könnte jemand ein solches System bewußt irreführend verwenden und damit schwerwiegende Folgen auslösen. Ein neuronales Netzwerk kennt keine Ethik. Jedoch in ferner Zukunft wäre denkbar, daß man einem System menschengemachte Normen beibringt, von denen es nicht abweichen kann, sofern der Mensch nicht anders entscheidet.

