Aufgabe: Zeigen Sie, daß jede pythagoräische Größe eine komplex-konjugierte Darstellung besitzt und geben Sie einige Beispiele.

Definition: Eine Größe c heißt *pythagoräisch*, wenn sie eine Darstellung der Form $c^2 = a^2 + b^2$ besitzt.

Beweis: Wir ersetzen das Pluszeichen durch die imaginäre Einheit $i^2 = -1$ und können den Satz des Pythagoras damit wie folgt schreiben:

$$c^2 = a^2 - i^2 b^2 = (a+ib)(a-ib).$$

Folglich ist $c = a + ib$ komplex und die komplex-konjugierte Größe lautet $c^* = a - ib.$ Daraus folgt

$$c^2 = |c|^2 = c \cdot c^*$$

qed

Beispiel 1: Der Einheitskreis ist pythagoräisch, denn

$$1 = \cos^2 x + \sin^2 x = (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x) = e^{ix} e^{-ix}.$$

Beispiel 2: Der Vierervektor der Speziellen Relativitätstheorie ist nicht pythagoräisch, sondern minkowskisch, und damit kein Vierervektor.

Definition: Eine Größe a heißt *minkowskisch*, wenn sie eine Darstellung der Form

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b)$$

besitzt. Dabei ist $c+b$ die kontravariante Darstellung von a und $c-b$ die kovariante.

Beweis: Ersetzen wir das Minuszeichen durch die imaginäre Einheit $i^2 = -1,$ erhalten wir den Ausdruck $a^2 = c^2 + i^2 b^2,$ der sich nicht in zwei Linearfaktoren aufspalten läßt. Die Größe a kann also nicht pythagoräisch sein, denn

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 + i^2 b^2 = (c+ib)^2 - 2icb = (c+ib)(c-ib+2ib) - 2icb \\ &= (c+ib)(c-ib) - 2b^2 \neq (c+ib)(c-ib). \end{aligned}$$

Setzen wir $a \equiv s_0,$ $c \equiv ct$ und $b \equiv vt,$ dann ist

$$s_0^2 = c^2 t^2 + i^2 v^2 t^2 = c^2 t^2 - v^2 t^2 = (ct+vt)(ct-vt) \neq (ct+ivt)(ct-ivt)$$

nicht pythagoräisch

qed

Die Einsteinsche Notation $s_0 = ct + ivt$ ist im Grunde nicht zulässig. Hingegen ist $s = s_0 + ivt$ ein Vierervektor.

Beweis: Sei $s^2 = c^2t^2 = s_0^2 + r^2$ pythagoräisch und $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_2^2}$ ein Dreiervektor, wobei $s_0 = ct_0 \equiv x_0$ die vierte Dimension des Raums ist. Dann ist

$$s^2 = s_0^2 + r^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_2^2$$

das Quadrat eines Vierervektors mit komplex-konjugierter Darstellung,

$$s^2 = s_0^2 + r^2 = s_0^2 - i^2r^2 = \left(s_0 + ir\right)\left(s_0 - ir\right),$$

d.h. es gilt $s = s_0 \pm ivt$. Damit ist der Weg zwar immer noch vierdimensional, aber nicht der Eigenweg s_0, wie Einstein es gern gesehen hätte, denn dieser ist leider nur eindimensional

qed

