Aufgabe: Berechnen Sie mit Hilfe der Lorentz-Transformation die Ruhegrößen für Energie, Masse und Impuls.

Lösung: Der Energie-Impuls-Satz in einem ruhenden System S lautet:

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2,$$

wobei E die Energie, p der Dreierimpuls, c die Lichtgeschwindigkeit und m_0 die Masse des Teilchens ist.

Dabei sind die Komponenten des Impulses im bewegten System S', das sich gegenüber S mit konstanter Geschwindigkeit v in x-Richtung bewegt, gegeben durch

$$p'_x = m'u'_x, \quad p'_y = m'u'_y, \quad p'_z = m'u'_z,$$

wobei sich die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{u}'$ im gestrichenen System nach den Additionstheoremen wie folgt darstellen:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad u'_y = \frac{u_y \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \quad u'_z = \frac{u_z \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}.$$

Diese Geschwindigkeiten hängen aber von den im System S gemessenen Geschwindigkeitskomponenten des Vektors $\mathbf{u}$ ab.

Für die Masse im bewegten System gilt

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}},$$

wobei sich das Betragsquadrat $u'^2 = u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2$ wie folgt errechnet:

$$u'^2 = \frac{(u_x - v)^2 + u_y^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + u_z^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)^2}.$$

Ausmultipliziert ergibt sich wegen $u = c$ die Konstanz der Geschwindigkeit in allen Inertialsystemen,

$$u'^2 = \frac{u_x^2 - 2u_x v + v^2 + u_y^2 - u_y^2 \dfrac{v^2}{c^2} + u_z^2 - u_z^2 \dfrac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right)^2} = \frac{u^2 - 2u_x v + \dfrac{u_x^2 v^2}{c^2}}{\left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right)^2} = u^2.$$

Setzen wir die Masse und die Geschwindigkeiten des bewegten Systems ein, ergeben sich in diesem die folgenden Impulse:

$$p'_x = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{u'^2}{c^2}}} \frac{u_x - v}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}}, \quad p'_y = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{u'^2}{c^2}}} \frac{u_y \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}}, \quad p'_z = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{u'^2}{c^2}}} \frac{u_z \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}}.$$

Mittels der Identität

$$\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \frac{(u_x - v)^2 + u_y^2 \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right) + u_z^2 \left(1 - \dfrac{v^2}{c^2}\right)}{c^2 \left(1 - \dfrac{u_x v}{c^2}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} + \frac{u^2 v^2}{c^4}} = \frac{1}{1 - \dfrac{u_x v}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

können wir im Nenner kürzen:

$$p'_x = \frac{m_0 (u_x - v)}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}} \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \quad p'_y = \frac{m_0 u_y}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}, \quad p'_z = \frac{m_0 u_z}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}.$$

Eliminieren wir noch die Masse mittels

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}},$$

ergeben sich schließlich die Impulskomponenten des bewegten Systems:

$$p'_x = \frac{m(u_x - v)}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} = \gamma \left(p_x - \frac{E}{c^2} v \right), \quad p'_y = m u_y = p_y, \quad p'_z = m u_z = p_z,$$

wobei wir für die Eliminierung der Masse die Äquivalenz von Masse und Energie $E = mc^2$ benutzt haben. Dabei steht

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

für den Lorentz-Faktor. Die Energie transformiert sich dann wie folgt:

$$E' = m'c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}.$$

Substituieren wir im Nenner die Geschwindigkeit wieder durch die des unbewegten Systems, ergibt sich

$$E' = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right) = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)$$

bzw. die Transformationsformel für die Masse,

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right),$$

was für $u_x = v$ im gestrichenen System die Ruhemasse

$$m_0 = m' = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = m\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

ergibt. Die Energie transformiert sich damit wie folgt:

$$E' = \frac{E}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right) = \frac{E}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{m u_x v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(E - p_x v\right).$$

Im ruhenden Inertialsystem hingegen gelten die Impulse

$$p_x = m u_x, \quad p_y = m u_y, \quad p_z = m u_z.$$

Mit den inversen Transformationen der Geschwindigkeiten

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1+\frac{u'_x v}{c^2}}, \quad u_y = \frac{u'_y\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{u'_x v}{c^2}}, \quad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{u'_x v}{c^2}}$$

ergibt sich eine Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten im bewegten System,

$$p_x = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \frac{u'_x + v}{1+\frac{u'_x v}{c^2}}, \quad p_y = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \frac{u'_y \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{u'_x v}{c^2}}, \quad p_z = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \frac{u'_z \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{u'_x v}{c^2}}.$$

Für ein Teilchen hingegen, das in S' ruht, erhalten wir wegen $u'_x = u'_y = u'_y = 0$ sowie der Identität

$$\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \sqrt{1-\frac{\left(u'_x + v\right)^2 + u'^2_y \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) + u'^2_z \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{c^2\left(1+\frac{u'_x v}{c^2}\right)^2}} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

im System S den Impuls

$$p_x = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad p_y = 0, \quad p_z = 0$$

und die Energie

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Die Ruheenergie im gestrichenen System, die man üblicherweise mit E_0 bezeichnet, ist dann gleich

$$E' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \frac{m_0 v^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0 c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} - \frac{m_0 v^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0 c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = m_0 c^2.$$

Lösen wir die Energie im Ruhesystem

$$E_0 = \gamma\left(E - p_x v\right)$$

nach E auf, erhalten wir

$$E = \frac{E_0}{\gamma} + p_x v = \frac{E_0}{\gamma} + \gamma m_0 v^2 = \gamma E_0 \left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{v^2}{c^2}\right) = \gamma E_0.$$

Durch Quadrieren ergibt sich

$$E^2 = \gamma^2 E_0^2.$$

Formen wir diesen Ausdruck um in

$$E^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) = E_0^2,$$

erhalten wir wieder die Energie-Impuls-Relation,

$$E^2 = E_0^2 + E^2\frac{v^2}{c^2} = E_0^2 + m^2v^2c^2 = E_0^2 + p^2c^2.$$

Der Impuls

$$\mathbf{p}' = m'\mathbf{u}' = \gamma m\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)\mathbf{u}'$$

transformiert sich ferner mit Hilfe der Beziehung

$$\gamma m\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)\mathbf{u}' = \left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{v^2}-\gamma\right]m\mathbf{v}+m\mathbf{u}$$

wie folgt:

$$\mathbf{p}' = \gamma m\left(1-\frac{u_x v}{c^2}\right)\mathbf{u}' = \left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{v^2}-\gamma\right]m\mathbf{v}+m\mathbf{u} = m\mathbf{u}-m\mathbf{v}$$

Der Ruheimpuls $\mathbf{p}' = \mathbf{p}_0$ ist demnach gegeben durch $\mathbf{p}_0 = m(\mathbf{u}-\mathbf{v})$. Quadrieren wir diese Relation, erhalten wir wegen $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ und $u = c$ das Resultat

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_0^2 &= m^2(\mathbf{u}-\mathbf{v})^2 = m^2\left(\mathbf{u}^2-2\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{v}^2\right) = m^2\left(\mathbf{u}^2-2\mathbf{v}^2+\mathbf{v}^2\right)\\ &= m^2\left(u^2-v^2\right) = m^2u^2\left(1-\frac{v^2}{u^2}\right) = \frac{m^2u^2}{\gamma^2}\end{aligned}$$

oder nach Ziehen der Wurzel die Relation

$$\frac{E}{c} = mu = \gamma p_0.$$

Lösen wir die Gleichung $\mathbf{p}_0^2 = m^2\left(\mathbf{u}^2-\mathbf{v}^2\right)$ nach dem Impuls $m\mathbf{u}$ auf, ergibt sich

$$\frac{E^2}{c^2} = m^2\mathbf{u}^2 = \mathbf{p}_0^2 + m^2\mathbf{v}^2 = \mathbf{p}_0^2 + \mathbf{p}^2.$$

Multiplizieren wir noch mit c^2, ergibt sich wieder die Einsteinsche Masse-Energie-Äquivalenz

$$E^2 = E_0^2 + p^2c^2.$$

Energie und Impuls können mittels der Minkowski-Metrik zu einem Vierervektor zusammengefaßt werden:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{E}{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mu \\ m\mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma m_0 c \\ \gamma m_0 \mathbf{v} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$p_0^2 = m_0^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 - m^2v^2 = m^2c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{1}{\gamma^2}m^2c^2.$$

Dabei ist $mc \neq p$ der energetische Anteil des Viererimpulses und $p = mv$ der gewöhnliche geschwindigkeitsabhängige Dreierimpuls. In komplexer Schreibweise ist allerdings der energetische Anteil der Vierervektor, und nicht der Ruheimpuls, mit dem Betragsquadrat

$$|mc|^2 = p_0^2 + p^2 = p_0^2 - i^2p^2 = (p_0 + ip)(p_0 - ip).$$

Der vierdimensionale Ruhe- oder Eigenimpuls p_0 ist eine allzeit eindimensionale skalare Größe.