Aufgabe: Berechnen Sie mit Hilfe der Lorentz-Transformation die Ruhegrößen für Raum, Zeit und Geschwindigkeit.

Lösung: Wir setzen für diese Aufgabe voraus, daß die Lorentz-Transformation bekannt ist:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\frac{\gamma}{c}v_x & -\frac{\gamma}{c}v_y & -\frac{\gamma}{c}v_z \\ -\frac{\gamma}{c}v_x & \delta_{xx}+(\gamma-1)\frac{v_x^2}{v^2} & \delta_{xy}+(\gamma-1)\frac{v_xv_y}{v^2} & \delta_{xz}+(\gamma-1)\frac{v_xv_z}{v^2} \\ -\frac{\gamma}{c}v_y & \delta_{yx}+(\gamma-1)\frac{v_yv_x}{v^2} & \delta_{yy}+(\gamma-1)\frac{v_y^2}{v^2} & \delta_{yz}+(\gamma-1)\frac{v_yv_z}{v^2} \\ -\frac{\gamma}{c}v_z & \delta_{zx}+(\gamma-1)\frac{v_zv_x}{v^2} & \delta_{zy}+(\gamma-1)\frac{v_zv_z}{v^2} & \delta_{zz}+(\gamma-1)\frac{v_z^2}{v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Dabei sind x, y z und ct die Orts- und Zeitkoordinaten im Inertialsystem S und x', y', z' und ct' die transformierten Koordinaten im System S'. Die Größe

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j, \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}$$

ist das Kronecker-Symbol. Um nun auf die Vektordarstellung zu kommen, formen wir die Matrix in Vektoren um:

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} ct - \frac{v_x x + v_y y + v_z z}{c} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[(\gamma-1)\frac{v_x x + v_y y + v_z z}{v^2} - \gamma t\right] \begin{pmatrix} 0 \\ v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}.$$

Dieser Vierervektor kann in eine dreidimensionale Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \left[(\gamma-1)\frac{v_x x + v_y y + v_z z}{v^2} - \gamma t\right] \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

und eine eindimensionale skalare Gleichung

$$ct' = \gamma\left(ct - \frac{v_x x + v_y y + v_z z}{c}\right)$$

zerlegt werden, oder in Vektornotation

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{v^2} - \gamma t\right]\mathbf{v}, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{c^2}\right).$$

Für die Rücktransformation brauchen wir nur das Vorzeichen des Geschwindigkeitsvektors zu ändern:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \left[(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}'}{v^2} + \gamma t' \right] \mathbf{v}, \quad t = \gamma \left(t' + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}'}{c^2} \right).$$

Die Transformation der Geschwindigkeit erhalten wir, indem wir entweder die gestrichenen Größen durcheinander dividieren,

$$\mathbf{u}' = \frac{\mathbf{x}'}{t'} = \frac{\frac{\mathbf{x}}{t} + (\gamma - 1) \frac{c^2}{v^2} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \frac{\mathbf{x}}{t} \right) \frac{\mathbf{v}}{c} - \gamma \mathbf{v}}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \cdot \frac{\mathbf{x}}{t} \right)} = \frac{\mathbf{u} + (\gamma - 1) \frac{c^2}{v^2} \left(\frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{u} \right) \frac{\mathbf{v}}{c} - \gamma \mathbf{v}}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \cdot \mathbf{u} \right)}$$

$$= \frac{\mathbf{u} + (\gamma - 1) \mathbf{u} - \gamma \mathbf{v}}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \cdot \mathbf{u} \right)} = \frac{\mathbf{u} - \mathbf{v}}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}},$$

oder die Differentialrechnung verwenden,

$$\mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{x}'}{dt'} = \frac{d\mathbf{x}}{dt'} + \left[(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v}}{v^2} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt'} - \gamma \frac{dt}{dt'} \right] \mathbf{v} = \frac{dt}{dt'} \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{dt}{dt'} \left[(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v}}{v^2} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \gamma \right] \mathbf{v},$$

was zum selben Ergebnis führt, wenn wir den Kehrwert der Ableitung

$$\frac{dt'}{dt} = \frac{d}{dt} \gamma \left(t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{c^2} \right) = \gamma \left(1 - \frac{\mathbf{v}}{c^2} \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right) = \gamma \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right)$$

einsetzen. Damit erhalten wir die Geschwindigkeit im bewegten System,

$$\mathbf{u}' = \frac{1}{\gamma \left(1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right)} \left\{ \frac{d\mathbf{x}}{dt} + \left[(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v}}{v^2} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} - \gamma \right] \mathbf{v} \right\} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{c^2}} \left\{ \frac{\mathbf{u}}{\gamma} + \left[(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v}}{v^2} \cdot \frac{\mathbf{u}}{\gamma} - 1 \right] \mathbf{v} \right\}$$

Da sich das Vorzeichen von **v** umkehrt, wenn wir den Vorgang im ungestrichenen System betrachten, gilt entsprechend

$$\mathbf{u} = \frac{1}{1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}'}{c^2}} \left\{ \frac{\mathbf{u}'}{\gamma} + \left[(\gamma - 1) \frac{\mathbf{v}}{v^2} \cdot \frac{\mathbf{u}'}{\gamma} + 1 \right] \mathbf{v} \right\}.$$

Im Falle $\mathbf{u}' = 0$ gilt $\mathbf{u} = \mathbf{v},$ so daß mit $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}'$ aus der Geschwindigkeit im bewegten System

$$\mathbf{u}' = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left\{ \frac{\mathbf{u}}{\gamma} + \left[(\gamma - 1) - \gamma \right] \frac{\mathbf{v}}{\gamma} \right\} = \gamma (\mathbf{u} - \mathbf{v})$$

die Vierer- oder Eigengeschwindigkeit folgt: $\mathbf{u}_0 = \gamma(\mathbf{u}-\mathbf{v})$. Quadrieren wir diese Gleichung, ergibt sich

$$\mathbf{u}_0^2 = \gamma^2\left(\mathbf{u}^2 - 2\mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{v}^2\right) = \gamma^2\left(\mathbf{u}^2 - 2\mathbf{v}^2 + \mathbf{v}^2\right) = \gamma^2\left(\mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2\right)$$

bzw.

$$u_0^2 = \gamma^2\left(u^2 - v^2\right) = \gamma^2 u^2\left(1 - \frac{v^2}{u^2}\right) = \gamma^2 c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = c^2,$$

d.h. die Lichtgeschwindigkeit ist in allen Bezugssystemen gleich. Um Viererort und Eigenzeit bestimmen zu können, substituieren wir in den Gleichungen

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{v^2} - \gamma t\right]\mathbf{v}, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{c^2}\right)$$

den Ort $\mathbf{x} = \mathbf{u}t$, womit wir folgende Ausdrücke erhalten:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{u}t + \left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{v^2} - \gamma\right]\mathbf{v}t, \quad t' = \gamma t\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right).$$

Da im gestrichenen System $\mathbf{u}' = 0$ ist und nach dem Additionstheorem $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, folgen mit $\mathbf{x}' = \mathbf{x}_0$ und $t' = t_0$ für Viererweg und Eigenzeit die Relationen

$$\mathbf{x}_0 = (\mathbf{u}-\mathbf{v})t, \quad t_0 = \gamma t\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{t}{\gamma}.$$

Quadrieren wir den Viererweg, erhalten wir den Ausdruck

$$\mathbf{x}_0^2 = (\mathbf{u}-\mathbf{v})^2 t^2 = \left(\mathbf{u}^2 - 2\mathbf{u}\mathbf{v} + \mathbf{v}^2\right)t^2 = \left(\mathbf{u}^2 - 2\mathbf{v}^2 + \mathbf{v}^2\right)t^2 = \left(\mathbf{u}^2 - \mathbf{v}^2\right)t^2.$$

Mit $\mathbf{x}_0^2 = s_0^2$ und $u = c$ und wenn wir $s = ct$ setzen, ergibt sich schließlich der Viererweg zu

$$s_0^2 = \left(u^2 - v^2\right)t^2 = c^2 t^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{s^2}{\gamma^2}.$$

Daraus folgt einerseits $s = \gamma s_0$ und andererseits die Gleichung des vierdimensionalen Wegelements,

$$s_0^2 = s^2 - v^2 t^2 = c^2 t^2 - \mathbf{x}^2.$$

Das kann man in komplexer Schreibweise als Vierervektor definieren,

$$s^2 = s_0^2 + v^2 t^2 = s_0^2 - i^2 v^2 t^2 = \left(s_0 + ivt\right)\left(s_0 - ivt\right),$$

wohingegen

$$\mathbf{s}_0 = \begin{pmatrix} s \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}$$

kein Vierervektor ist, auch wenn Einstein ihn als solchen definiert hat. Seine Definition widerspricht nämlich dem Satz des Pythagoras, und eine komplexe Darstellung erlaubt sie gleichwohl nicht.

Konsequenterweise wäre die Zeit dann ebenfalls ein Vierervektor,

$$t^2 = t_0^2 + \frac{\mathbf{x}^2}{c^2} = t_0^2 - i^2 \frac{\mathbf{x}^2}{c^2} = \left(t_0 + i \frac{\mathbf{x}}{c} \right) \left(t_0 - i \frac{\mathbf{x}}{c} \right),$$

nicht aber die Eigenzeit

$$\mathbf{t}_0 = \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x}/c \end{pmatrix}.$$

Diese ist und bleibt ein Skalar. In dieser und der vorangehenden Aufgabe haben wir gezeigt, daß alle physikalischen Größen wie Ort, Zeit, Geschwindigkeit, Masse, Impuls und Energie Vierergrößen sind und sich damit aus vier Komponenten zusammensetzen lassen, einer potentiellen und drei kinetischen. An der Dreidimensionalität der Welt ändert das allerdings nichts, da die vierte Dimension nur ein konstanter Offset ist.