Aufgabe: Berechnen Sie mit Hilfe der Lorentz-Transformation die Ruhegrößen für Beschleunigung und Kraft in zwei sich mit konstanter Geschwindigkeit v relativ zueinander bewegenden Systemen.

Lösung: Die Geschwindigkeit im bewegten System lautet nach dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten

$$\mathbf{u}' = \frac{1}{1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}\left\{\frac{\mathbf{u}}{\gamma}+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\frac{\mathbf{u}}{\gamma}-1\right]\mathbf{v}\right\},$$

wobei $\mathbf{u}$ die additive Geschwindigkeit im Ruhesystem S ist und

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

der Lorentzfaktor. Das Differential von $\mathbf{u}'$ ist wegen der Konstanz von $\mathbf{v}$ und γ gegeben durch

$$d\mathbf{u}' = \frac{d\mathbf{u}+(\gamma-1)\left(\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot d\mathbf{u}\right)\mathbf{v}}{\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)}+\frac{\mathbf{u}+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\mathbf{u}-\gamma\right]\mathbf{v}}{\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\frac{\mathbf{v}\cdot d\mathbf{u}}{c^2}.$$

Mit dem Zeitdifferential des bewegten Systems

$$dt' = \gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)dt$$

errechnet sich die Beschleunigung durch Quotientenbildung,

$$\mathbf{a}' = \frac{d\mathbf{u}'}{dt'} = \frac{\frac{d\mathbf{u}}{dt}+(\gamma-1)\left(\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt}\right)\mathbf{v}}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}+\frac{\frac{\mathbf{u}}{c}+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\mathbf{u}-\gamma\right]\frac{\mathbf{v}}{c}}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^3}\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

Substitution der Beschleunigung $\mathbf{a}=\dot{\mathbf{u}}$ in S liefert den Ausdruck

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{a}}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}-\frac{c^2}{v^2}\frac{\gamma-1}{\gamma^3\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^3}\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{a}\right)\frac{\mathbf{v}}{c}+\frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^3}\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{a}\right)\frac{\mathbf{u}}{c}.$$

Im bewegten System S', in dem das Teilchen ruht, ist $\mathbf{u}'=0$, d.h.

Copyright © 2024, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

$$\mathbf{u}=\frac{1}{1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}}\left\{\frac{\mathbf{u}'}{\gamma}+\left[\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\frac{\mathbf{u}'}{\gamma}+1\right]\mathbf{v}\right\}=\mathbf{v}.$$

Daraus resultiert die Eigenbeschleunigung

$$\mathbf{a}_0=\mathbf{a}'=\frac{\mathbf{a}}{\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2}-\frac{c^2}{v^2}\frac{\gamma-1}{\gamma^3\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{a}\right)\frac{\mathbf{v}}{c}+\frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{a}\right)\frac{\mathbf{v}}{c}$$

$$=\gamma^2\mathbf{a}+\gamma^2\left(\gamma^2-\frac{c^2}{v^2}\gamma\left(\gamma-1\right)\right)\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{a}\right)\frac{\mathbf{v}}{c}=\gamma^2\left[\mathbf{a}+\left(\gamma^2\frac{v^2}{c^2}-\gamma\left(\gamma-1\right)\right)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v^2}\mathbf{v}\right].$$

Mittels der Relation

$$\gamma^2\frac{v^2}{c^2}=\gamma^2-1$$

lautet das endgültige Ergebnis:

$$\mathbf{a}_0=\gamma^2\left[\mathbf{a}+\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v^2}\mathbf{v}\right]\quad\text{bzw.}\quad\mathbf{a}=\frac{\mathbf{a}_0}{\gamma^2}-\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v^2}\mathbf{v}.$$

Quadrieren wir die Ruhebeschleunigung, folgt

$$\mathbf{a}_0^2=\gamma^4\left[\mathbf{a}+\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v^2}\mathbf{v}\right]^2=\gamma^4\left(\mathbf{a}^2+\left(2\gamma-2\right)\frac{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\right)^2}{v^2}+\left(\gamma^2-2\gamma+1\right)\frac{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\right)^2}{v^2}\right)$$

$$=\gamma^4\left(\mathbf{a}^2+\left(\gamma^2-1\right)\frac{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\right)^2}{v^2}\right)=\gamma^4\left(\mathbf{a}^2+\left(\gamma^2-1\right)\frac{c^2}{v^2}\frac{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\right)^2}{c^2}\right)=\gamma^4\mathbf{a}^2+\gamma^6\frac{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\right)^2}{c^2}$$

bzw.

$$\mathbf{a}^2=\frac{\mathbf{a}_0^2}{\gamma^4}-\gamma^2\frac{v^2}{c^2}\frac{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\right)^2}{v^2}=\frac{\mathbf{a}_0^2}{\gamma^4}-\left(\gamma^2-1\right)\frac{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\right)^2}{v^2}.$$

Für $v=0$ bzw. $\gamma=1$ ist die Beschleunigung gleich der Eigenbeschleunigung $\mathbf{a}=\mathbf{a}_0$, und für $v=c$ geht sie unabhängig vom Winkel φ zwischen Geschwindigkeit und Beschleunigung gegen Null, da γ gegen Unendlich geht,

$$\mathbf{a}^2+\left(\gamma^2-1\right)\frac{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}\right)^2}{v^2}=\mathbf{a}^2\left(1+\left(\gamma^2-1\right)\cos^2\varphi\right)=\frac{\mathbf{a}_0^2}{\gamma^4}$$

bzw.

Copyright © 2024, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

$$\mathbf{a}^2 = \frac{\mathbf{a}_0^2}{\gamma^4\left(1+\left(\gamma^2-1\right)\cos^2\varphi\right)} \to 0.$$

Wenn die Beschleunigung parallel zur Geschwindigkeit ist, ergibt sich wegen $\varphi = 0$ eine kubische Abhängigkeit vom Lorentz-Faktor,

$$\mathbf{a}_0 = \gamma^2\left[\mathbf{a}+(\gamma-1)\mathbf{a}\right] = \gamma^3\mathbf{a},$$

steht sie senkrecht dazu $(\varphi = \pi/2)$, ist $\mathbf{a}_0 = \gamma^2\mathbf{a}$ und es liegt eine quadratische Abhängigkeit vor. Quadrieren wir die Eigenbeschleunigung, erhalten wir den Ausdruck

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_0^2 &= \gamma^4\left[\mathbf{a}+(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v^2}\mathbf{v}\right]^2 = \gamma^4\left[\mathbf{a}^2+\left((\gamma-1)^2+2(\gamma-1)\right)\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})^2}{v^2}\right]\\ &= \gamma^4\left[\mathbf{a}^2+\left(\gamma^2-1\right)\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v}\right)^2\right] = \gamma^4\mathbf{a}^2+\gamma^6\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{a}\right)^2.\end{aligned}$$

Soviel zur relativistischen Beschleunigung. Kommen wir nun zur relativistischen Kraft.

Mit dem Impuls $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ ist die Kraft in einem Inertialsystem gegeben durch

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dm\mathbf{u}}{dt} = m\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u}\frac{dm}{dt}.$$

Die Änderung der Masse erhalten wir aus der Umformung

$$\mathbf{u}\frac{dm}{dt} = \mathbf{F} - m\frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

durch Multiplikation mit $\mathbf{u}$,

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\frac{dm}{dt} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{u} - m\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt}.$$

Daraus ergibt sich mittels der Substitution $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{u}}$ die Massenänderung in Abhängigkeit von der Kraft und der Beschleunigung,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{u} - m\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{u^2}.$$

Im Gegensatz zur Newtonschen Mechanik erfolgt die Herleitung der Kraft in der Relativitätstheorie wegen der Massenveränderlichkeit nicht durch Multiplikation Masse mal Beschleunigung, sondern durch Ableitung des Impulses nach der Zeit. Im gestrichenen Bezugssystem, welches sich mit der Geschwindigkeit **v** von uns wegbewegt, ist die Kraft gegeben durch

Copyright © 2024, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

$$\mathbf{F}' = \frac{d\mathbf{p}'}{dt'} = \frac{dm'\mathbf{u}'}{dt'} = \mathbf{u}'\frac{dm'}{dt'} + m'\frac{d\mathbf{u}'}{dt'}.$$

Da die Masse im bewegten Bezugssystem ihrerseits von der Geschwindigkeit **u** abhängt, müssen wir das Additionstheorem der Geschwindigkeiten heranziehen, wonach

$$\mathbf{u}' = \frac{1}{1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}\left\{\frac{\mathbf{u}}{\gamma} + \left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\frac{\mathbf{u}}{\gamma} - 1\right]\mathbf{v}\right\}.$$

Die Ableitung dieser Geschwindigkeit nach der Zeit im bewegten System t' liefert die bereits hergeleitete Beschleunigung

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{a}}{\gamma^2\left(1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2} - \frac{c^2}{v^2}\frac{\gamma-1}{\gamma^3\left(1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^3}\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{a}\right)\frac{\mathbf{v}}{c} + \frac{1}{\gamma^2\left(1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^3}\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\mathbf{a}\right)\frac{\mathbf{u}}{c}.$$

Für die Masse im bewegten Bezugssystem gilt die Abhängigkeit

$$m' = \frac{m}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right).$$

Da die Masse m' nicht bloß von $\mathbf{u}$, sondern ebenfalls von der im stationären Bezugssystem gemessenen Masse m abhängt, ist sie von der Zeit t abhängig. Das Differential im bewegten Bezugssystem ist folglich gegeben durch

$$dm' = \frac{dm}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right) - \frac{m}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\frac{\mathbf{v}\cdot d\mathbf{u}}{c^2}.$$

Da wir nach der Zeit t' im bewegten Bezugssystem nicht ableiten können, benötigen wir die Lorentz-Transformierte der Zeit,

$$dt' = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)dt.$$

Dividieren wir diese beiden Differentiale durcheinander, erhalten wir mit $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{u}}$ als letzte noch verbliebene Unbekannte die Ableitung

$$\frac{dm'}{dt'} = \frac{dm}{dt} - \frac{1}{1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}\frac{\mathbf{v}}{c^2}\cdot m\mathbf{a}.$$

Copyright © 2024, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

Setzen wir alle bereitgestellten Größen in unsere Ausgangsgleichung ein, ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\mathbf{F}' = \frac{1}{1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}\left\{\frac{\mathbf{u}}{\gamma}+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\frac{\mathbf{u}}{\gamma}-1\right]\mathbf{v}\right\}\frac{dm}{dt}-\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot m\mathbf{a}\right)\frac{\mathbf{u}}{c}$$
$$-\frac{1}{\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\frac{\mathbf{u}}{\gamma}-1\right]\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot m\mathbf{a}\right)\frac{\mathbf{v}}{c}+\frac{m\mathbf{a}}{\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)}$$
$$-\frac{c^2}{v^2}\frac{\gamma-1}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot m\mathbf{a}\right)\frac{\mathbf{v}}{c}+\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot m\mathbf{a}\right)\frac{\mathbf{u}}{c}.$$

Die Terme proportional zu **u** kürzen sich sofort heraus. Nach entsprechender Umformung der übrigen Ausdrücke erhalten wir

$$\mathbf{F}' = \frac{\mathbf{u}\frac{dm}{dt}+m\mathbf{a}}{\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)}+\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)}\frac{dm}{dt}\left[(\gamma-1)\left(\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\mathbf{u}\right)-\gamma\right]\mathbf{v}$$
$$-\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\left(\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot m\mathbf{a}\right)\mathbf{v}+\frac{1}{\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\frac{v^2}{c^2}\left(\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot m\mathbf{a}\right)\mathbf{v}$$
$$-\frac{\gamma}{\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot m\mathbf{a}\right)\mathbf{v}+\frac{1}{\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot m\mathbf{a}\right)\mathbf{v}.$$

Schließlich verbleibt die nur von Größen des unbewegten Systems abhängige Gleichung

$$\mathbf{F}' = \frac{1}{\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)}\left\{\mathbf{u}\frac{dm}{dt}+m\mathbf{a}+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\left\{\mathbf{u}\frac{dm}{dt}+m\mathbf{a}\right\}-\gamma\frac{dm}{dt}\right]\mathbf{v}\right\}.$$

Substituieren wir darin die Kraft gemäß

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{dm\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{u}\frac{dm}{dt}+m\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{u}\frac{dm}{dt}+m\mathbf{a},$$

ergibt sich

$$\mathbf{F}' = \frac{1}{\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)}\left\{\mathbf{F}+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\mathbf{F}-\gamma\frac{dm}{dt}\right]\mathbf{v}\right\}.$$

Copyright © 2024, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

Multiplizieren wir die Kraftgleichung im unbewegten System

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u}\frac{dm}{dt}$$

mit $\mathbf{u}$,

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{u} = m\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\frac{dm}{dt} = m\mathbf{u}\cdot\mathbf{a} + u^2\frac{dm}{dt},$$

und differenzieren die Masse

$$m = \frac{m'\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

die sich mittels der Beziehung

$$\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)}$$

wie folgt schreiben läßt,

$$m = \frac{m'\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{m'\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}},$$

nach der Zeit t,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{m'\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}^3}\frac{1}{c^2}\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}{\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}^3}\frac{1}{c^2}m\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}^3}\frac{1}{c^2}m\mathbf{u}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{1}{1-\frac{u^2}{c^2}}\frac{1}{c^2}\mathbf{u}\cdot m\mathbf{a},$$

können wir die Richtung der Geschwindigkeit $\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot m\mathbf{a})$ wegen $\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot m\mathbf{a}) = (\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})m\mathbf{a}$ durch die Richtung der Beschleunigung $u^2 m\mathbf{a}$ ersetzen,

Copyright © 2024, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} + \mathbf{u}\frac{dm}{dt} = m\mathbf{a} + \frac{m}{c^2}\frac{\mathbf{u}(\mathbf{u}\cdot\mathbf{a})}{1-\frac{u^2}{c^2}} = m\mathbf{a} + \frac{m}{c^2}\frac{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\mathbf{a}}{1-\frac{u^2}{c^2}} = m\mathbf{a} + \frac{u^2}{c^2}\frac{m\mathbf{a}}{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{m\mathbf{a}}{1-\frac{u^2}{c^2}}.$$

Nach Umformung ist

$$\mathbf{F}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) = m\mathbf{a} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{F} = m\mathbf{a} + \frac{u^2}{c^2}\mathbf{F}.$$

Multiplikation mit $\mathbf{u}$ liefert das Skalarprodukt

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{u} = m\mathbf{a}\cdot\mathbf{u} + \frac{u^2}{c^2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{u},$$

woraus am Ende die Identität der Massenänderung

$$\frac{dm}{dt} = \frac{(\mathbf{F}-m\mathbf{a})\cdot\mathbf{u}}{u^2} = \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}}{c^2}$$

folgt. Die Kraft besteht also aus dem herkömmlichen Term Masse mal Beschleunigung plus einem zum Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen dynamischen Anteil, der sich nur bei hohen Geschwindigkeiten auswirkt, nicht aber in der Newtonschen Mechanik. Eliminieren wir damit die Massenänderung, verbleibt

$$\mathbf{F}' = \frac{1}{\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)}\left\{\mathbf{F} + \mathbf{v}\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\mathbf{F} - \gamma\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right]\right\}$$

bzw. in anderer Schreibweise

$$\mathbf{F}' = \frac{1}{1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}\left\{\mathbf{F}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + \mathbf{v}\left[\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)\cdot\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{v^2} - \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right]\right\}.$$

Die Kraft im bewegten Bezugssystem enthält also einen Term in Richtung der Kraft im unbewegten System und einen Term in Richtung der Relativgeschwindigkeit zwischen beiden Systemen.

Wenn wir $\mathbf{u}' = 0$ setzen, d.h. $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, erhalten wir mit $\mathbf{F}' = \mathbf{F}_0$ die Eigenkraft

$$\mathbf{F}_0 = \gamma\mathbf{F} + \mathbf{v}\left[(\gamma^2-\gamma)\cdot\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{v^2} - \gamma^2\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right] = \gamma\mathbf{F} + \mathbf{v}\left[\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)-\gamma\right]\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{v^2}$$

und schließlich die übersichtlichere Darstellung

$$\mathbf{F}_0 = \gamma\mathbf{F} - (\gamma-1)\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{v^2}\mathbf{v}.$$

Copyright © 2024, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

Multiplizieren wir die Eigenbeschleunigung

$$\mathbf{a}_0 = \gamma^2 \left[\mathbf{a} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{v^2} \mathbf{v} \right]$$

mit der Masse m_0,

$$\mathbf{F}_0 = m_0 \mathbf{a}_0 = m_0 \gamma^2 \left[\mathbf{a} + (\gamma - 1) \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}}{v^2} \mathbf{v} \right] = \gamma \left[m\mathbf{a} + (\gamma - 1) \frac{m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} \right],$$

erhalten wir mittels der Substitution

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F} - \mathbf{v} \frac{dm}{dt}$$

die Eigenkraft

$$\mathbf{F}_0 = \gamma \left(\mathbf{F} - \mathbf{v} \frac{dm}{dt} \right) + \frac{\gamma^2 - \gamma}{v^2} \left[\left(\mathbf{F} - \mathbf{v} \frac{dm}{dt} \right) \cdot \mathbf{v} \right] \mathbf{v} = \gamma \mathbf{F} + (\gamma^2 - \gamma) \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} - \gamma^2 \frac{dm}{dt} \mathbf{v}.$$

Eliminieren wir darin die zeitliche Massenänderung vermöge

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}}{c^2} = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c^2},$$

folgt schließlich

$$\mathbf{F}_0 = \gamma \mathbf{F} + \left[(\gamma^2 - \gamma) \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{v^2} - \gamma^2 \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{c^2} \right] \mathbf{v} = \gamma \mathbf{F} - (\gamma - 1) \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v}.$$

Die Eigenkraft ist also gleich der Kraft $\mathbf{F}$, falls $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Fv$, d.h. falls die Kraft in Richtung der Geschwindigkeit zeigt,

$$\mathbf{F}_0 = \gamma \mathbf{F} - (\gamma - 1) \frac{Fv}{v} \frac{\mathbf{v}}{v} = \gamma \mathbf{F} - (\gamma - 1) \mathbf{F} = \mathbf{F},$$

bzw. proportional zur Kraft, falls $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0$, d.h. wenn Kraft und Geschwindigkeit senkrecht aufeinander stehen,

$$\mathbf{F}_0 = \gamma \mathbf{F} - (\gamma - 1) \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}}{v^2} \mathbf{v} = \gamma \mathbf{F}.$$

Die Kraft verschwindet demnach für $v = c$, da γ unendlich wird,

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{F}_0}{\gamma} \to 0.$$

Copyright © 2024, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.

Das ist ein völlig unerwartetes Verhalten, da Kraft und Beschleunigung nicht wie Raum und Zeit oder Impuls und Energie mit der Geschwindigkeit zunehmen, sondern das Gegenteilige der Fall ist. Verwunderlich ist insbesondere, daß die Ruhegrößen bei Bewegung abnehmen und damit noch unterschritten werden, was eigentlich nicht sein kann. Daher mag es von großem Interesse erscheinen, wie sich die Vierergrößen verhalten, ob sie möglicherweise ein umgekehrtes Verhalten zeigen oder ob es einen anderen Grund für diese „Anomalie" gibt.

Quadrieren wir die Ruhekraft,

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_0^2 &= \left(\gamma\mathbf{F} - (\gamma-1)\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{v^2}\mathbf{v}\right)^2 = \gamma^2\mathbf{F}^2 + (\gamma-1)^2\frac{(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})^2}{v^2} - 2\gamma(\gamma-1)\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{v^2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \\
&= \gamma^2\mathbf{F}^2 + (\gamma^2 - 2\gamma + 1)\frac{(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})^2}{v^2} - 2\gamma^2\frac{(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})^2}{v^2} + 2\gamma\frac{(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})^2}{v^2} \\
&= \gamma^2\mathbf{F}^2 - (\gamma^2 - 1)\frac{c^2}{v^2}\frac{(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})^2}{c^2} = \gamma^2\left[\mathbf{F}^2 - \left(\mathbf{F}\cdot\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2\right],
\end{aligned}$$

ergibt sich die relativistische Kraft entsprechend zu

$$\mathbf{F}^2 = \frac{\mathbf{F}_0^2}{\gamma^2} + \left(\mathbf{F}\cdot\frac{\mathbf{v}}{c}\right)^2 = \frac{\mathbf{F}_0^2}{\gamma^2} + \mathbf{F}^2\cos^2\varphi\,\frac{v^2}{c^2}.$$

Mithin gilt allgemein

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2\varphi}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\mathbf{F}_0.$$

Ist die Kraft parallel zur Geschwindigkeit $(\varphi = 0)$, ist die Kraft gleich ihrer Eigenkraft, steht sie senkrecht dazu $(\varphi = \pi/2)$, gilt $\mathbf{F} = \mathbf{F}_0/\gamma$.

Wir haben hier nur als Spezialfall analysiert, was wir oben bereits allgemein gezeigt haben.

Copyright © 2024, Manfred Hiebl. Alle Rechte vorbehalten.