**Aufgabe:** Leiten Sie die Vierervektoren der Speziellen Relativitätstheorie her.

**Lösung:** Für die Spezielle Relativitätstheorie benötigt man die Minkowski-Metrik. Danach ist der Vierervektor ein Vektor, der sich additiv aus dem normalen Ortsvektor **x** mit den Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ und einer vierten Raumrichtung $\mathbf{e}_4$ gemäß

$$x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 + x_4\mathbf{e}_4 = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 + ct\mathbf{e}_4$$

zusammensetzt. Einer Konvention folgend stellt man die vierte Dimension voran, so daß der Vierervektor des gestrichenen Systems aus Erhaltungsgründen gleich dem Vierervektor des ungestrichenen Systems ist und umgekehrt:[1]

$$\mathbf{s}' = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = ct\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

Mit den Basisvektoren

$$\mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

können wir den Vierervektor $\mathbf{s}' = ct\mathbf{e}_4 + i\mathbf{x}$ wie eine Zahl behandeln, wohl wissend, daß $\mathbf{e}_4$ und $i$ Vektoren sind, deren Skalarprodukte wie folgt lauten:[2]

$$\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \quad \mathbf{e}_4 \cdot i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,$$
$$i \cdot \mathbf{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0, \quad i \cdot i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

Mit den kontra- und kovarianten Vierervektoren

$$\mathbf{s}' = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = ct\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} = ct\mathbf{e}_4 + i\mathbf{x} \quad \text{und} \quad \overline{\mathbf{s}}' = \begin{pmatrix} ct \\ -\mathbf{x} \end{pmatrix} = ct\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\mathbf{x} = ct\mathbf{e}_4 - i\mathbf{x}$$

läßt sich das quadratische Wegelement wie eine komplexe Zahl berechnen:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}'^2 &= \mathbf{s}' \cdot \overline{\mathbf{s}}' = (ct\mathbf{e}_4 + i\mathbf{x})(ct\mathbf{e}_4 - i\mathbf{x}) = c^2t^2(\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_4) - ct\mathbf{x}(\mathbf{e}_4 \cdot i) + \mathbf{x}ct(i \cdot \mathbf{e}_4) - (i \cdot i)\mathbf{x}^2 \\ &= c^2t^2 - \mathbf{x}^2 \end{aligned}$$

oder einfacher

[1] Die physikalischen Gesetze sind universell, d.h. unabhängig vom Bezugssystem.

[2] Im Unterschied zur Funktionentheorie ist das Quadrat von *i* in der Minkowski-Metrik gleich eins.

 

$$\mathbf{s}'^2 = \mathbf{s}' \cdot \overline{\mathbf{s}}' = (ct, \mathbf{x})\begin{pmatrix} ct \\ -\mathbf{x} \end{pmatrix} = \left[ct(1,0) + (0,1)\mathbf{x}\right]\left[ct\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\mathbf{x}\right] = (ct + i\mathbf{x})(ct - i\mathbf{x})$$
$$= ct(1,0)ct\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + ct(1,0)\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\mathbf{x} + (0,1)\mathbf{x}ct\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + (0,1)\mathbf{x}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\mathbf{x} = c^2t^2 - \mathbf{x}^2.$$

Das komplexe Betragsquadrat[3] ist somit völlig identisch zum Minkowskischen Skalarprodukt

$$\mathbf{s}'^2 = (ct + \mathbf{x})(ct - \mathbf{x}) = \left[ct(1,0) + (1,0)\mathbf{x}\right]\left[ct\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mathbf{x}\right]$$
$$= ct(1,0)ct\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - ct(1,0)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mathbf{x} + (1,0)\mathbf{x}ct\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - (1,0)\mathbf{x}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\mathbf{x}$$
$$= c^2t^2 - ct\mathbf{x} + \mathbf{x}ct - \mathbf{x}^2 = c^2t^2 - \mathbf{x}^2,$$

wobei wir lediglich aufpassen müssen, daß

$$|i|^2 = i \cdot i^* = i \cdot (-i) = \begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = -1$$

und wir nicht $i^2 = -1$ setzen dürfen, womit dann auch das konjugiert-komplexe Betragsquadrat

$$\mathbf{s}'^2 = \mathbf{s}' \cdot \overline{\mathbf{s}}' = (ct\mathbf{e}_4 + i\mathbf{x})(ct\mathbf{e}_4 + \overline{i}\mathbf{x}) = c^2t^2 + i \cdot \overline{i}\mathbf{x}^2 = c^2t^2 - \mathbf{x}^2$$

die richtigen Ergebnisse liefert, wohingegen die anderen Möglichkeiten (hier zum Vergleich) falsch sind:

$$\mathbf{s}'^2 = \mathbf{s}' \cdot \mathbf{s}' = \left[ct(1,0) + (0,1)\mathbf{x}\right]\left[ct\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\mathbf{x}\right] = c^2t^2 + \mathbf{x}^2,$$
$$\overline{\mathbf{s}}'^2 = \overline{\mathbf{s}}' \cdot \overline{\mathbf{s}}' = \left[ct(1,0) + (0,-1)\mathbf{x}\right]\left[ct\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\mathbf{x}\right] = c^2t^2 + \mathbf{x}^2.$$

Für komplexe Vierervektoren $\mathbf{s}' = ct\mathbf{e}_4 + i\mathbf{x}$ und $\overline{\mathbf{s}}' = ct\mathbf{e}_4 + \overline{i}\mathbf{x}$ ist das Skalarprodukt ähnlich definiert wie für reelle Vektoren, lediglich mit imaginären räumlichen Anteilen,

$$\mathbf{s}'^2 = \mathbf{s}' \cdot \overline{\mathbf{s}}' = (ct\mathbf{e}_4 + i\mathbf{x})(ct\mathbf{e}_4 + \overline{i}\mathbf{x})$$
$$= c^2t^2\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_4 + ct\mathbf{x}\left(i \cdot \mathbf{e}_4 + \mathbf{e}_4 \cdot \overline{i}\right) + i \cdot \overline{i}\mathbf{x}^2 = c^2t^2 - \mathbf{x}^2.$$

Man beachte, daß die Minkowski-Metrik nicht konform zur Funktionentheorie ist, in welcher gilt:

$$\mathbf{s}'^2 = \mathbf{s}' \cdot \overline{\mathbf{s}}' = (ct\mathbf{e}_4 + i\mathbf{x})(ct\mathbf{e}_4 - i\mathbf{x}) = c^2t^2\mathbf{e}_4 \cdot \mathbf{e}_4 - i^2\mathbf{x}^2 = c^2t^2 + \mathbf{x}^2.$$

[3] Man muß sich wegen des negativen Vorzeichens keine Sorgen machen, da negative Werte physikalisch nicht vorkommen können.

 

Weil man der Meinung war, ein Betragsquadrat dürfe nicht negativ werden, hat man $i^2=-1$ gesetzt, was aber zu Diskrepanzen mit dem Viererformalismus führt, denn $i^2=1$ (siehe oben). Da Raum und Zeit aufeinander senkrecht stehen, verschwindet der Imaginärteil ohnehin. Der quadratische Viererwegunterschied $ds'^2$ kann theoretisch sowohl positiv als auch negativ sein. Da der Fall $ds'^2<0$ das Kausalitätsgesetz verletzt und bisher kein Nachweis einer überlichtschnellen Ausbreitung gelungen ist, gibt es in unserem Universum keine raumartigen Ereignisse, es sei denn, man nimmt an, daß sich der Raum beim Urknall überlichtschnell ausgebreitet hat. Einsteins Hypothese besagt aber, daß sich nichts schneller als das Licht ausbreiten kann, und davon sind auch Energie und Impuls betroffen. Da Raum und Zeit lediglich die Kehrwerte dieser Größen sind, sollte das auch für das Universum gelten. Weil aber die Vergangenheit gemäß dem Kausalitätsgesetz nicht mehr existiert, kann man auch nicht in die Vergangenheit reisen. Diese läßt sich lediglich anhand von Erinnerungen und Aufzeichnungen wiedergeben. Das heißt aber nicht, daß die Vergangenheit in einem abgeschlossenen System nicht eines Tages wiederkehren könnte. Bei einem reellen und positiven Betragsquadrat $ds'^2\geq 0$ müssen also alle Ereignisse zeit- oder lichtartig sein. Man muß also nicht wie in der Minkowski-Metrik zu ko- und kontravarianten Vektoren greifen.

*Vierervektor.*[4] Wir beginnen mit dem Vierervektor der Raumzeit, deren Orts- und Zeitkoordinaten mittels der Lorentz-Transformation gegeben sind durch

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}'+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}'}{v^2}+\gamma t'\right]\mathbf{v},\quad ct=\gamma\left(ct'+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}'}{c}\right).$$

Quadrieren wir die Orts- und Zeitkoordinaten, ergibt sich

$$\mathbf{x}^2=\left\{\mathbf{x}'+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}'}{v^2}+\gamma t'\right]\mathbf{v}\right\}^2,\quad c^2t^2=\gamma^2\left(ct'+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}'}{c}\right)^2.$$

Durch Subtraktion erhält man den Ausdruck

$$c^2t^2-\mathbf{x}^2=\gamma^2\left(ct'+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}'}{c}\right)^2-\left\{\mathbf{x}'+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}'}{v^2}+\gamma t'\right]\mathbf{v}\right\}^2=\gamma^2\left(ct'+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}'}{c}\right)^2-\mathbf{x}'^2$$
$$-2\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}'}{v^2}+\gamma t'\right]\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}'-\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}'}{v^2}+\gamma t'\right]^2v^2.$$

Löst man die quadratischen Terme auf, folgt weiter

$$c^2t^2-\mathbf{x}^2=\gamma^2c^2t'^2+2\gamma^2\mathbf{v}t'\cdot\mathbf{x}'+\frac{\gamma^2}{c^2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}')^2-\mathbf{x}'^2-\left(2\gamma^2-2\gamma\right)\mathbf{v}t'\cdot\mathbf{x}'$$
$$-\left(\gamma^2-2\gamma+1\right)\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}')^2}{v^2}-\gamma^2v^2t'^2-(2\gamma-2)\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}')^2}{v^2}-2\gamma\mathbf{v}t'\cdot\mathbf{x}'.$$

[4] Es geht aus dem Kontext hervor, welcher der zahlreichen Vierervektoren jeweils gemeint ist. Wenn sonst nichts vermerkt ist, ist damit stets der Vierervektor der Raumzeit gemeint.

 

Nach Kürzung verbleibt

$$c^2t^2 - \mathbf{x}^2 = \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) t'^2 - \mathbf{x}'^2 + \left[\frac{\gamma^2}{c^2} - \frac{\gamma^2 - 1}{v^2}\right] (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}')^2 .$$

Wie man leicht nachrechnet, ist

$$\frac{\gamma^2}{c^2} = \frac{\gamma^2 - 1}{v^2}.$$

Damit erhalten wir schließlich die Invariante

$$\mathbf{s}'^2 = c^2t^2 - \mathbf{x}^2 = c^2 t'^2 - \mathbf{x}'^2 = \mathbf{s}^2 .$$

Umgekehrt ist die Größe $\mathbf{s}$ mit den Rücktransformationen

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \left[(\gamma - 1)\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{v^2} - \gamma t\right] \mathbf{v}, \quad ct' = \gamma c \left(t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{c^2}\right)$$

ebenfalls ein Vierervektor. Der Gang der Rechnung ist der gleiche:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^2 &= \gamma^2 c^2 \left(t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{c^2}\right)^2 - \left\{\mathbf{x} + \mathbf{v}\left[(\gamma - 1)\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{v^2} - \gamma t\right]\right\}^2 \\ &= \gamma^2 c^2 t^2 - 2\gamma^2 t \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} + \gamma^2 \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})^2}{c^2} - \mathbf{x}^2 - (2\gamma - 2)\frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})^2}{v^2} + 2\gamma t \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} \\ &\quad - (\gamma^2 - 2\gamma + 1)\frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})^2}{v^2} + (2\gamma^2 - 2\gamma) t \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} - v^2 \gamma^2 t^2 . \end{aligned}$$

Nach Kürzen entsprechender Terme ist klar, daß auch die Umkehrtransformation

$$\mathbf{s}^2 = \gamma^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) t^2 - \mathbf{x}^2 + \left[\frac{\gamma^2}{c^2} - \frac{\gamma^2 - 1}{v^2}\right] (\mathbf{v} \cdot \mathbf{x})^2 = c^2 t^2 - \mathbf{x}^2 = \mathbf{s}'^2$$

invariant ist. Da die beiden Quadrate identisch sind, sind auch die Wurzeln gleich, d.h. $\mathbf{s} = \mathbf{s}'$, woraus mit der Lorentz-Transformation folgende Zusammenhänge ergeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}' &= ct + i\mathbf{x} = \gamma c \left(t' + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}'}{c^2}\right) + i\left\{\mathbf{x}' + \mathbf{v}\left[(\gamma - 1)\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}'}{v^2} + \gamma t'\right]\right\}, \\ \mathbf{s} &= ct' + i\mathbf{x}' = \gamma c \left(t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{c^2}\right) + i\left\{\mathbf{x} + \mathbf{v}\left[(\gamma - 1)\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{v^2} - \gamma t\right]\right\}. \end{aligned}$$

Indem wir die beiden Gleichungen voneinander subtrahieren, erkennen wir, daß Raum und Zeit bei einer Lorentz-Transformation erhalten bleiben,

 

$$c(t'-t)+i(\mathbf{x}'-\mathbf{x})=\gamma c\left(t-t'+\frac{\mathbf{v}}{c^2}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right)+i\gamma\mathbf{v}\left(t-t'+\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')\right).$$

Das ist nur möglich, wenn die beiden Koeffizientengleichungen identisch verschwinden,

$$\begin{aligned}&(\gamma+1)c^2(t-t')+\gamma\mathbf{v}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=0,\\&\gamma v^2(t-t')+(\gamma+1)\mathbf{v}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=0.\end{aligned}$$

Wir haben also ein homogenes lineares Gleichungssystem mit zwei Unbekannten vorliegen, für das es eine eindeutige Lösung gibt. Eliminieren wir mittels

$$\mathbf{v}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=-\frac{\gamma}{\gamma+1}v^2(t-t')$$

in der ersten Gleichung den relativen Ortsanteil, folgt aus $(1+\gamma)(t-t')=0$ die Gleichheit der Zeit $t=t'$ in jedem Bezugssystem. Eliminieren wir hingegen mittels

$$t-t'=-\frac{\gamma}{(\gamma+1)c^2}\mathbf{v}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

in der zweiten Gleichung den relativen Zeitanteil, folgt aus $(1+\gamma)\mathbf{v}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=0$ die Gleichheit des Raums $\mathbf{x}=\mathbf{x}'$ in jedem Bezugssystem. Wir haben damit gezeigt, daß analog zur Energie- und Impulserhaltung auch die Erhaltung der Raumzeit gilt,

$$t'=t \quad \text{und} \quad \mathbf{x}'=\mathbf{x}.$$

Daher sieht es für ein expandierendes Universum ausgesprochen schlecht aus, es sei denn, man zweifelt die Gültigkeit der Relativitätstheorie an.

Man kann, wenn man will, den Beweis auch noch anders führen. Um die Gleichheit der Zeiten und des Raumes in allen Bezugssystemen zu beweisen, bilden wir die gemischten Quadrate

$$(ct+i\mathbf{x}')^2=c^2t^2+i^2\mathbf{x}'^2+2ict\mathbf{x}' \quad \text{und} \quad (ct'+i\mathbf{x})^2=c^2t'^2+i^2\mathbf{x}^2+2ict'\mathbf{x}$$

und ziehen sie voneinander ab, so daß sich nach Umformung der Ausdruck

$$(ct+i\mathbf{x}')^2-(ct'+i\mathbf{x})^2=c^2t^2-i^2\mathbf{x}^2-\left(c^2t'^2-i^2\mathbf{x}'^2\right)+ic(t\mathbf{x}'-t'\mathbf{x})-ic(t'\mathbf{x}-t\mathbf{x}')$$

ergibt. Da die Imaginärteile wegen des reellen Betragsquadrats identisch verschwinden,

$$t\mathbf{x}'-t'\mathbf{x}=0 \quad \text{bzw.} \quad t'\mathbf{x}-t\mathbf{x}'=0,$$

setzen wir im ersten Schritt **x** und *t* gemäß den Lorentz-Transformationen

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}'+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}'}{v^2}+\gamma t'\right]\mathbf{v} \quad \text{und} \quad t=\gamma\left(t'+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}'}{c^2}\right)$$

 

in die Gleichung $t\mathbf{x}' = t'\mathbf{x}$ ein,

$$\gamma\left(t' + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}'}{c^2}\right)\mathbf{x}' = \left[\mathbf{x}' + (\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}'}{v^2}\mathbf{v} + \gamma\mathbf{v}t'\right]t',$$

formen entsprechend um,

$$\gamma\mathbf{x}'t' + \gamma\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}'}{c^2}\mathbf{x}' = \mathbf{x}'t' + (\gamma-1)\mathbf{x}'t' + \gamma t'^2\mathbf{v} = \gamma\mathbf{x}'t' + \gamma t'^2\mathbf{v},$$

kürzen gleiche Terme auf beiden Seiten, so daß die Relation

$$\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}'}{c^2}\mathbf{x}' = t'^2\mathbf{v}$$

verbleibt, die wegen der Identität $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}')\mathbf{x}' = (\mathbf{x}'\cdot\mathbf{x}')\mathbf{v}$ und nach Multiplikation mit $\mathbf{v}$ den Ausdruck

$$\mathbf{x}'^2 = c^2t'^2$$

ergibt. Ähnlich setzen wir die Rücktransformationen

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{v^2} - \gamma t\right]\mathbf{v}, \quad ct' = \gamma c\left(t - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{c^2}\right)$$

in den zweiten Imaginärteil $t'\mathbf{x} = t\mathbf{x}'$ ein,

$$\gamma\left(t - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{c^2}\right)\mathbf{x} = t\left(\mathbf{x} + \left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{v^2} - \gamma t\right]\mathbf{v}\right)$$

multiplizieren aus,

$$\gamma\mathbf{x}t - \gamma\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{c^2}\mathbf{x} = \mathbf{x}t + (\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}t}{v^2}\mathbf{v} - \gamma t^2\mathbf{v},$$

formen um,

$$(\gamma-1)\mathbf{x}t + \gamma t^2\mathbf{v} = \gamma\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{c^2}\mathbf{x} + (\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}t}{v^2}\mathbf{v},$$

machen von der Identität $(\mathbf{v}\cdot\mathbf{x})\mathbf{v} = (\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\mathbf{x}$ Gebrauch,

$$(\gamma-1)\mathbf{x}t + \gamma t^2\mathbf{v} = \gamma\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{c^2}\mathbf{x} + (\gamma-1)\mathbf{x}t,$$

womit wir schließlich nach Kürzen den Ausdruck

 

$$t^2\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{c^2}\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}{c^2}\mathbf{v}$$

finden, der mit $\mathbf{v}$ multipliziert die Relation $c^2t^2 = \mathbf{x}^2$ ergibt. Damit vereinfacht sich unsere Ausgangsgleichung beträchtlich,

$$\left(ct + i\mathbf{x}'\right)^2 - \left(ct' + i\mathbf{x}\right)^2 = 0$$

bzw. $\left(ct + i\mathbf{x}'\right)^2 = \left(ct' + i\mathbf{x}\right)^2$. Ziehen wir daraus die Wurzel, $ct + i\mathbf{x}' = ct' + i\mathbf{x}$, folgt nach Koeffizientenvergleich $t = t'$ und $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$. Wir haben damit auch gezeigt, daß die beiden Bewegungsgleichungen in jedem Bezugssystem identisch sind,

$$\mathbf{x} = ct \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}' = ct',$$

und daß die Welt lichtartig ist, weil die quadratischen Wegelemente identisch verschwinden:

$$\mathbf{s}'^2 = c^2t^2 - \mathbf{x}^2 = 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{s}^2 = \mathbf{x}'^2 - c^2t'^2 = 0.$$

Setzen wir die Transformationsgleichungen der Lorentz-Transformation in die beiden Vierervektoren ein, folgt nach geringfügiger Umformung

$$\mathbf{s} = ct' + i\mathbf{x}' = \gamma c\left(t - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{c^2}\right) + i\left(\mathbf{x} + \left[\left(\gamma - 1\right)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{v^2} - \gamma t\right]\mathbf{v}\right) = ct + i\mathbf{x}$$
$$+\left[\left(\gamma - 1\right)ct - \gamma\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{c}\right] + i\left[\left(\gamma - 1\right)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{v^2}\mathbf{v} - \gamma\mathbf{v}t\right]$$

Damit der dritte und der vierte Term zum Verschwinden gebracht werden können, muß das lineare Gleichungssystems mit zwei Variablen

$$\left(\gamma - 1\right)c^2t - \gamma\mathbf{v}\cdot\mathbf{x} = 0,$$
$$-\gamma\frac{v^2}{c^2}c^2t + \left(\gamma - 1\right)\mathbf{v}\cdot\mathbf{x} = 0$$

gelöst werden. Dazu multiplizieren wir die obere Gleichung mit $\gamma - 1$ und die untere mit $\gamma$,

$$\left(\gamma - 1\right)^2 c^2t - \gamma\left(\gamma - 1\right)\mathbf{v}\cdot\mathbf{x} = 0,$$
$$-\gamma^2\frac{v^2}{c^2}c^2t + \gamma\left(\gamma - 1\right)\mathbf{v}\cdot\mathbf{x} = 0,$$

und addieren beide Gleichungen:

$$\left[\left(\gamma - 1\right)^2 - \gamma^2\frac{v^2}{c^2}\right]c^2t = \left[\gamma^2\left(\gamma^2 - \frac{v^2}{c^2}\right) - 2\gamma + 1\right]c^2t = 2\left(1 - \gamma\right)c^2t = 0.$$

Dieser Ausdruck kann nur verschwinden, wenn $(\gamma-1)t=0$ ist und folglich $t=0$ sein muß. Um die zweite Lösung zu finden, formen wir zunächst wie folgt um,

$$(\gamma-1)\frac{v^2}{c^2}c^2t-\gamma\frac{v^2}{c^2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}=0,$$
$$-\gamma\frac{v^2}{c^2}c^2t+(\gamma-1)\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}=0,$$

multiplizieren die obere Gleichung mit $\gamma$ und die untere mit $\gamma-1$

$$\gamma(\gamma-1)\frac{v^2}{c^2}c^2t-\gamma^2\frac{v^2}{c^2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}=0,$$
$$-\gamma(\gamma-1)\frac{v^2}{c^2}c^2t+(\gamma-1)^2\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}=0,$$

und addieren wie gehabt,

$$\left[(\gamma-1)^2-\gamma^2\frac{v^2}{c^2}\right]\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}=\left[\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)-2\gamma+1\right]\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}=2(1-\gamma)\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}=0.$$

Dieser Ausdruck kann nur verschwinden, wenn $\mathbf{x}=0$ ist, denn dann verschwinden der dritte und der vierte Term ebenfalls und es gilt

$$\mathbf{s}=ct'+i\mathbf{x}'=ct+i\mathbf{x}+\left[(\gamma-1)ct-\gamma\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{c}\right]+i\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}}{v^2}\mathbf{v}-\gamma\mathbf{v}t\right]=ct+i\mathbf{x}=\mathbf{s}'.$$

Durch Gleichsetzen folgt außerdem, daß wegen

$$\mathbf{s}=ct'+i\mathbf{x}'=ct+i\mathbf{x}=\mathbf{s}'.$$

die Gleichung

$$c(t-t')+i(\mathbf{x}-\mathbf{x}')=0$$

nur verschwinden kann, wenn die Zeit- und Raumerhaltung $t=t'$ und $\mathbf{x}-\mathbf{x}'$ gilt, d.h. wenn Raum und Zeit ähnlich wie Impuls und Energie in jedem Bezugssystem gleich sind. Damit lautet der Vierervektor

$$\mathbf{s}'=\begin{pmatrix}ct\\ \mathbf{x}\end{pmatrix}=ct+i\mathbf{x}.$$

Dabei ist nach dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten $\mathbf{x}=\mathbf{u}t,$ wobei $\mathbf{u}$ nach dem Additionstheorem der Geschwindigkeiten die relativistische Überlagerung aus der Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}$ und der der im bewegten System gemessenen Geschwindigkeit $\mathbf{u}'$ ist. Drücken wir die vierdimensionalen Wegelemente durch die additiven Geschwindigkeiten aus, lauten die Vierervektoren

 

$$\mathbf{s}' = ct + i\mathbf{x} = \gamma ct'\left(1 + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right) + i\left\{\mathbf{u}' + \left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{v^2} + \gamma\right]\mathbf{v}\right\}t',$$
$$\mathbf{s} = ct' + i\mathbf{x}' = \gamma ct\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right) + i\left\{\mathbf{u} + \left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{v^2} - \gamma\right]\mathbf{v}\right\}t.$$

Deren Quadrate sind dann gegeben durch

$$\mathbf{s}'^2 = \gamma^2 c^2 t'^2\left(1 + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2 - \left\{\mathbf{u}' + \left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{v^2} + \gamma\right]\mathbf{v}\right\}^2 t'^2 = \gamma^2 c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t'^2 - \mathbf{u}'^2 t'^2$$
$$+2\gamma(\gamma-1)\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'t'^2 - 2\gamma(\gamma-1)\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'t'^2 + \left[\frac{\gamma^2}{c^2} - \frac{\gamma^2-1}{v^2}\right](\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}')^2 t'^2$$

bzw.

$$\mathbf{s}^2 = \gamma^2 c^2 t^2\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2 - \left\{\mathbf{u} + \left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{v^2} - \gamma\right]\mathbf{v}\right\}^2 t^2 = \gamma^2 c^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)t^2 - \mathbf{u}^2 t^2$$
$$+2\gamma(\gamma-1)\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}t^2 - 2\gamma(\gamma-1)\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}t^2 + \left[\frac{\gamma^2}{c^2} - \frac{\gamma^2-1}{v^2}\right](\mathbf{v}\cdot\mathbf{u})^2 t^2.$$

Nach Kürzen verschwindender Terme ergeben sich folgende quadratische Wege:

$$\mathbf{s}'^2 = c^2 t'^2 - \mathbf{u}'^2 t'^2 = c^2 t'^2 - \mathbf{x}'^2,$$
$$\mathbf{s}^2 = c^2 t^2 - \mathbf{u}^2 t^2 = c^2 t^2 - \mathbf{x}^2.$$

Setzen wir diese aus Gründen der Invarianz gleich, d.h. $\mathbf{s}'^2 = c^2 t'^2 - \mathbf{u}'^2 t'^2 = c^2 t^2 - \mathbf{u}^2 t^2$, folgen bei verschwindender Bewegung im gestrichenen System, also mit $\mathbf{u}' = 0$ und $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ die Eigenzeit $t_0$ bzw. der Eigenort $\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}t$,

$$\mathbf{s}_0^2 = c^2 t_0^2 = c^2 t^2 - \mathbf{v}^2 t^2 = \frac{c^2 t^2}{\gamma^2}.$$

Mit den dreidimensionalen Geschwindigkeiten

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{t}, \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{x}'}{t'}$$

kann der Vierervektor alternativ auch geschrieben werden als

$$\mathbf{s}' = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{u}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{u}'t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

 

*Vierergeschwindigkeit.* Die Vierergeschwindigkeit ist die Ableitung des Vierervektors im gestrichenen System nach der Zeit des gestrichenen Systems,

$$\frac{d\mathbf{s}'}{dt'}=\frac{d}{dt'}\begin{pmatrix}ct\\ \mathbf{x}\end{pmatrix}=\frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}ct\\ \mathbf{x}\end{pmatrix}=\frac{dt}{dt'}\left(\frac{dct}{dt}+i\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right).$$

Die Orts- und Zeitdifferentiale sind gegeben durch

$$d\mathbf{x}=d\mathbf{x}'+\left[\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}\cdot d\mathbf{x}'}{v^2}+\gamma dt'\right]\mathbf{v},\quad cdt=\gamma c\left(dt'+\frac{\mathbf{v}\cdot d\mathbf{x}'}{c^2}\right).$$

Differenzieren wir Ortsvektor und Zeit nach $t'$, ergibt sich

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt'}=\frac{d\mathbf{x}'}{dt'}+\left[\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\frac{d\mathbf{x}'}{dt'}+\gamma\right]\mathbf{v},\quad \frac{cdt}{dt'}=\gamma c\left(1+\frac{\mathbf{v}}{c^2}\cdot\frac{d\mathbf{x}'}{dt'}\right).$$

Wir gehen nun aufgrund der Umformung

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt'}=\frac{d\mathbf{x}'}{dt'}+\left[\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\frac{d\mathbf{x}'}{dt'}+\gamma\frac{dt'}{dt'}\right]\mathbf{v}=\mathbf{u}'+\left[\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\mathbf{u}'+\gamma\right]\mathbf{v}=\gamma\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)\mathbf{u},$$

wobei wir von der Substitution

$$\mathbf{u}=\frac{1}{\gamma\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)}\left\{\mathbf{u}'+\left[\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\mathbf{u}'+\gamma\right]\mathbf{v}\right\}$$

Gebrauch gemacht haben, von den symmetrischen Komponentengleichungen

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt'}=\gamma\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)\mathbf{u},\quad \frac{dct}{dt'}=\gamma\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)c$$

aus. Damit lautet die allgemeinste Form der Vierergeschwindigkeit im gestrichenen System

$$\frac{d\mathbf{s}'}{dt'}=\frac{d}{dt'}\begin{pmatrix}ct\\ \mathbf{x}\end{pmatrix}=\frac{dct}{dt'}+i\frac{d\mathbf{x}}{dt'}=\gamma\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)\begin{pmatrix}c\\ \mathbf{u}\end{pmatrix}.$$

Quadrieren wir die beiden Komponenten, folgt aus

$$\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt'}\right)^2=\gamma^2\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2\mathbf{u}^2,\quad \left(\frac{dct}{dt'}\right)^2=\gamma^2\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2c^2$$

nach Subtraktion der beiden Ausdrücke zunächst die quadratische Vierergeschwindigkeit

$$\left(\frac{d\mathbf{s}'}{dt'}\right)^2=\gamma^2\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2\left(c^2-\mathbf{u}^2\right).$$

 

Machen wir von der Relation

$$c^2-\mathbf{u}^2=\frac{1}{\gamma^2\left(1+\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\left(c^2-\mathbf{u}'^2\right)$$

Gebrauch, sehen wir sofort, daß die quadratischen Wegelemente identisch sind,

$$\left(\frac{d\mathbf{s}'}{dt'}\right)^2=c^2-\mathbf{u}'^2=\left(\frac{cdt'}{dt'}\right)^2-\left(\frac{d\mathbf{x}'}{dt'}\right)^2=\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt'}\right)^2,$$

d.h. $d\mathbf{s}'^2=d\mathbf{s}^2$. Umgekehrt benötigen wir für die Rückrechnung die Differenz $c^2-\mathbf{u}'^2$ im gestrichenen System. Aus der Lorentz-Transformation der Geschwindigkeiten

$$u'^2=u_x'^2+u_y'^2+u_z'^2=\frac{\left(u_x-v\right)^2+\dfrac{u_y^2}{\gamma^2}+\dfrac{u_z^2}{\gamma^2}}{\left(1-\dfrac{u_xv}{c^2}\right)^2}=\frac{u_x^2-2u_xv+v^2+u_y^2-u_y^2\dfrac{v^2}{c^2}+u_z^2-u_z^2\dfrac{v^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{u_xv}{c^2}\right)^2}$$

$$=\frac{\left(u_x^2+u_y^2+u_z^2\right)\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)-2u_xv+v^2+u_x^2\dfrac{v^2}{c^2}}{\left(1-\dfrac{u_xv}{c^2}\right)^2}$$

erhalten wir mit den Substitutionen $u^2=u_x^2+u_y^2+u_z^2$ und $u_xv=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$ die Gleichung

$$\mathbf{u}'^2=\frac{u^2\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)+c^2-2u_xv+u_x^2\dfrac{v^2}{c^2}-c^2\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\dfrac{u_xv}{c^2}\right)^2}=\frac{\dfrac{u^2}{\gamma^2}+c^2\left(1-\dfrac{2u_xv}{c^2}+\dfrac{u_x^2v^2}{c^4}\right)-\dfrac{c^2}{\gamma^2}}{\left(1-\dfrac{u_xv}{c^2}\right)^2}$$

$$=\frac{c^2\left(1-\dfrac{u_xv}{c^2}\right)^2-c^2\left(1-\dfrac{u^2}{c^2}\right)\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1-\dfrac{u_xv}{c^2}\right)^2}=c^2-\frac{1}{\gamma^2\left(1-\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)^2}\left(c^2-\mathbf{u}^2\right),$$

Damit ist gezeigt, daß

$$c^2-\mathbf{u}'^2=\frac{1}{\gamma^2\left(1-\dfrac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)^2}\left(c^2-\mathbf{u}^2\right)=\gamma^2\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2\left(c^2-\mathbf{u}^2\right)$$

bzw.

 

$$\frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)^2}=\gamma^2\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2.$$

Damit folgt dasselbe Ergebnis,

$$\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt'}\right)^2=\left(\frac{cdt'}{dt'}\right)^2-\left(\frac{d\mathbf{x}'}{dt'}\right)^2=c^2-\mathbf{u}'^2=\gamma^2\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2\left(c^2-\mathbf{u}^2\right)$$
$$=\frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)^2}\left[\left(\frac{cdt}{dt}\right)-\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2\right]=\left(\frac{cdt}{dt'}\right)-\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt'}\right)^2=\left(\frac{d\mathbf{s}'}{dt'}\right)^2.$$

Andererseits ist die Vierergeschwindigkeit im ungestrichenen System die Ableitung des Vierervektors des ungestrichenen Systems nach der Zeit,

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt}=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}ct'\\ \mathbf{x}'\end{pmatrix}=\frac{dt'}{dt}\frac{d}{dt'}\begin{pmatrix}ct'\\ \mathbf{x}'\end{pmatrix}=\frac{dt'}{dt}\left(\frac{dct'}{dt'}+i\frac{d\mathbf{x}'}{dt'}\right).$$

Die Orts- und Zeitdifferentiale sind gegeben durch

$$d\mathbf{x}'=d\mathbf{x}+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot d\mathbf{x}}{v^2}-\gamma dt\right]\mathbf{v},\quad dct'=\gamma c\left(dt-\frac{\mathbf{v}\cdot d\mathbf{x}}{c^2}\right).$$

Differenzieren wir Ortsvektor und Zeit nach $t$, ergibt sich

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt}=\frac{d\mathbf{x}}{dt}+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\frac{d\mathbf{x}}{dt}-\gamma\right]\mathbf{v},\quad \frac{cdt'}{dt}=\gamma c\left(1-\frac{\mathbf{v}}{c^2}\cdot\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right).$$

Wir machen nun mit der Umformung

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt}=\frac{d\mathbf{x}}{dt}+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\frac{d\mathbf{x}}{dt}-\gamma\right]\mathbf{v}=\mathbf{u}+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\mathbf{u}-\gamma\right]\mathbf{v}=\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)\mathbf{u}'$$

weiter, wobei wir von der Substitution

$$\mathbf{u}'=\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)}\left\{\mathbf{u}+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\mathbf{u}-\gamma\right]\mathbf{v}\right\}$$

Gebrauch gemacht haben. Mit den symmetrischen Transformationsgleichungen

$$\frac{d\mathbf{x}'}{dt}=\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)\mathbf{u}',\quad \frac{dct'}{dt}=\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)c$$

läßt sich der Vierergeschwindigkeit des ungestrichenen Systems schreiben als

 

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt}=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} ct' \\ \mathbf{x}' \end{pmatrix}=\frac{dct'}{dt}+i\,\frac{d\mathbf{x}'}{dt}=\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)\begin{pmatrix} c \\ \mathbf{u}' \end{pmatrix}.$$

Quadrieren wir die beiden Komponenten, folgt mit

$$\left(\frac{d\mathbf{x}'}{dt}\right)^2=\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2\mathbf{u}'^2,\quad \left(\frac{cdt'}{dt}\right)^2=\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2c^2$$

nach Subtraktion zunächst das Quadrat der Vierergeschwindigkeit

$$\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right)^2=\left(\frac{cdt'}{dt}\right)^2-\left(\frac{d\mathbf{x}'}{dt}\right)^2=\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2\left(c^2-\mathbf{u}'^2\right).$$

Setzen wir die Lorentz-Transformation

$$c^2-\mathbf{u}'^2=\frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left(c^2-\mathbf{u}^2\right)$$

ein, ergibt sich einfacher

$$\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right)^2=c^2-\mathbf{u}^2=\left(\frac{cdt}{dt}\right)^2-\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2=\left(\frac{d\mathbf{s}'}{dt}\right)^2.$$

Auch hier sehen wir, daß die quadratischen Wegelemente identisch sind, also $d\mathbf{s}'^2=d\mathbf{s}^2$. Die andere Richtung beweisen wir wie folgt:

$$\left(\frac{d\mathbf{s}'}{dt}\right)^2=\left(\frac{cdt}{dt}\right)^2-\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt}\right)^2=c^2-\mathbf{u}^2=\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2\left(c^2-\mathbf{u}'^2\right)$$
$$=\frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\left[\left(\frac{cdt'}{dt'}\right)^2-\left(\frac{d\mathbf{x}'}{dt'}\right)^2\right]=\left(\frac{cdt'}{dt}\right)^2-\left(\frac{d\mathbf{x}'}{dt}\right)^2=\left(\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right)^2$$

*Viererbeschleunigung.* Die Viererbeschleunigung ist die Ableitung der Vierergeschwindigkeit des bewegten Systems nach der Zeit $t'$ des bewegten Systems,

$$\frac{d}{dt'}\left(\frac{d\mathbf{s}'}{dt'}\right)=\frac{d}{dt'}\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)}\begin{pmatrix} c \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}=\frac{d}{dt'}\frac{c}{\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)}+i\,\frac{d}{dt'}\frac{\mathbf{u}}{\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)},$$

oder die zweifache Ableitung der Vierervektors,

$$\frac{d}{dt'}\left(\frac{d\mathbf{s}'}{dt'}\right)=\frac{d^2}{dt'^2}\begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix}=\frac{d^2\left(ct\mathbf{e}_4+i\mathbf{x}\right)}{dt'^2}=\frac{d^2ct}{dt'^2}+i\,\frac{d^2\mathbf{x}}{dt'^2}.$$

 

Die zeitliche Komponente der Viererbeschleunigung erhalten wir am einfachsten durch nochmalige Differentiation der zeitlichen Komponente der Vierergeschwindigkeit nach der Zeit $t'$:

$$\begin{aligned}\frac{d^2ct}{dt'^2} &= \frac{d}{dt'}\left(\frac{cdt}{dt'}\right) = \frac{d}{dt'}\frac{cdt}{\gamma\left(1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)dt} = \frac{c}{\gamma}\frac{d}{dt'}\frac{1}{1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}} = \frac{c}{\gamma^2}\frac{1}{1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}\frac{d}{dt}\frac{1}{1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}\\ &= \frac{c}{\gamma^2}\frac{1}{1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}\frac{1}{\left(1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\frac{\mathbf{v}}{c^2}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{1}{\gamma^2\left(1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^3}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c},\end{aligned}$$

die räumliche durch nochmalige Differentiation der räumlichen Komponente der Vierergeschwindigkeit:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{x}}{dt'^2} &= \frac{d}{dt'}\left(\frac{d\mathbf{x}}{dt'}\right) = \frac{1}{\gamma}\frac{d}{dt'}\frac{1}{1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{1}{\gamma^2}\frac{1}{1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}\frac{d}{dt}\frac{1}{1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}\frac{d\mathbf{x}}{dt}\\ &= \frac{1}{\gamma^2}\frac{1}{1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}\frac{1}{1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}\frac{d}{dt}\frac{d\mathbf{x}}{dt} + \frac{1}{\gamma^2}\frac{1}{1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}\frac{d\mathbf{x}}{dt}\frac{d}{dt}\frac{1}{1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}\\ &= \frac{1}{\gamma^2}\frac{1}{\left(1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{\gamma^2}\frac{1}{1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}\mathbf{u}\frac{1}{\left(1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\frac{\mathbf{v}}{c^2}\cdot\frac{d\mathbf{u}}{dt}\\ &= \frac{1}{\gamma^2\left(1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left[\mathbf{a}+\left(1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^{-1}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\frac{\mathbf{u}}{c}\right].\end{aligned}$$

Die Viererbeschleunigung ist somit gegeben durch

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{s}'}{dt'^2} &= \begin{pmatrix}\dfrac{d^2ct}{dt'^2}\\ \dfrac{d^2\mathbf{x}}{dt'^2}\end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma^2\left(1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\begin{pmatrix}0\\ \mathbf{a}\end{pmatrix} + \frac{1}{\gamma^2\left(1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^3}\begin{pmatrix}\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\\ \dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\dfrac{\mathbf{u}}{c}\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{\gamma^2\left(1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^3}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c} + i\frac{1}{\gamma^2\left(1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^3}\left[\left(1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)\mathbf{a}+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\frac{\mathbf{u}}{c}\right].\end{aligned}$$

Quadrieren wir die beiden Terme,

$$\left(\frac{d^2ct}{dt'^2}\right)^2 = \frac{1}{\gamma^4\left(1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^6}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\right)^2, \quad \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt'^2}\right)^2 = \frac{1}{\gamma^4\left(1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^4}\left[\mathbf{a}+\left(1-\dfrac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^{-1}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\right)\frac{\mathbf{u}}{c}\right]^2,$$

ergibt deren Differenz die gewünschte Norm

 

$$\left(\frac{d^2ct}{dt'^2}\right)^2-\left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt'^2}\right)^2=\frac{1}{\gamma^4\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^4}\left\{\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^{-2}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\right)^2-\left[\mathbf{a}+\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^{-1}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\frac{\mathbf{u}}{c}\right]^2\right\}.$$

Der zweite mögliche Weg führt über die Differentiale der Vierergeschwindigkeit,

$$d\,\frac{d\mathbf{x}}{dt'}=d\mathbf{u}'+\left[\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot d\mathbf{u}'+\gamma\right]\mathbf{v},\quad d\,\frac{cdt}{dt'}=\gamma\,\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot d\mathbf{u}'.$$

Dividieren wir diese Differentiale durch $dt'$, ergibt sich

$$\frac{d}{dt'}\frac{d\mathbf{x}}{dt'}=\frac{d\mathbf{u}'}{dt'}+\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\frac{d\mathbf{u}'}{dt'}\mathbf{v},\quad \frac{d}{dt'}\frac{cdt}{dt'}=\gamma\,\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\frac{d\mathbf{u}'}{dt'}$$

oder besser

$$\frac{d^2\mathbf{x}}{dt'^2}=\mathbf{a}'+\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'}{v^2}\mathbf{v},\quad \frac{d^2ct}{dt'^2}=\gamma\,\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'}{c}.$$

Die Quadratur der beiden Terme liefert

$$\left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt'^2}\right)^2=\left[\mathbf{a}'+\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'}{v^2}\mathbf{v}\right]^2,\quad \left(\frac{d^2ct}{dt'^2}\right)^2=\frac{\gamma^2}{c^2}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'\right)^2.$$

Durch Subtraktion beider Quadrate erhalten wir zunächst die Relation

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt'^2}\right)^2-\left(\frac{d^2ct}{dt'^2}\right)^2&=\left[\mathbf{a}'+\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'}{v^2}\mathbf{v}\right]^2-\frac{\gamma^2}{c^2}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'\right)^2=\mathbf{a}'^2+2\left(\gamma-1\right)\frac{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'\right)^2}{v^2}\\&\quad+\left(\gamma-1\right)^2\frac{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'\right)^2}{v^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'\right)^2.\end{aligned}$$

Lösen wir den quadratischen Term auf, folgt übersichtlicher

$$\begin{aligned}\left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt'^2}\right)^2-\left(\frac{d^2ct}{dt'^2}\right)^2&=\mathbf{a}'^2+\left(2\gamma-2\right)\frac{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'\right)^2}{v^2}+\left(\gamma^2-2\gamma+1\right)\frac{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'\right)^2}{v^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'\right)^2\\&=\mathbf{a}'^2+\left[\frac{\gamma^2-1}{v^2}-\frac{\gamma^2}{c^2}\right]\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'\right)^2=\mathbf{a}'^2.\end{aligned}$$

Die Norm der Viererbeschleunigung ist damit wegen des entfallenden Zeitanteils gleich der Norm der Beschleunigung im gestrichenen System,

$$\left(\frac{d^2ct}{dt'^2}\right)^2-\left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt'^2}\right)^2=-\mathbf{a}'^2=\left(c\,\frac{d^2t'}{dt'^2}\right)^2-\left(\frac{d^2\mathbf{x}'}{dt'^2}\right)^2.$$

Alternativ hätten wir auch die Vierergeschwindigkeit ableiten können. Mit den Substitutionen

 

$$\mathbf{u} = \frac{1}{1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}}\left\{\frac{\mathbf{u}'}{\gamma}+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\frac{\mathbf{u}'}{\gamma}+1\right]\mathbf{v}\right\}$$

und

$$d\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{u}'+(\gamma-1)\left(\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot d\mathbf{u}'\right)\mathbf{v}}{\gamma\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)} - \frac{\mathbf{u}'+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\mathbf{u}'+\gamma\right]\mathbf{v}}{\gamma\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\frac{\mathbf{v}\cdot d\mathbf{u}'}{c^2}$$

erhalten wir auf schnellere Weise das gleiche Resultat,

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{s}'}{dt'^2} &= \gamma\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot\frac{d\mathbf{u}'}{dt'}\right)+i\gamma\left[\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)\frac{d\mathbf{u}}{dt'}+\mathbf{u}\left(\frac{\mathbf{v}}{c^2}\cdot\frac{d\mathbf{u}'}{dt'}\right)\right]\\ &= \gamma\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'}{c}+i\left[\mathbf{a}'+(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'}{v^2}\mathbf{v}\right].\end{aligned}$$

Der restliche Gang der Rechnung ist wie oben. Das Quadrat der Beschleunigung

$$\begin{aligned}\mathbf{a}' &= \frac{\mathbf{a}}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}-\frac{c^2}{v^2}\frac{\gamma-1}{\gamma^3\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^3}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\frac{\mathbf{v}}{c}+\frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^3}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\frac{\mathbf{u}}{c}\\ &= \frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left\{\mathbf{a}+\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^{-1}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\left[\frac{\mathbf{u}}{c}-\frac{c^2}{v^2}\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mathbf{v}}{c}\right]\right\}\end{aligned}$$

im bewegten System berechnet sich nunmehr wie folgt:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}'^2 &= \frac{1}{\gamma^4\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^4}\left\{\mathbf{a}+\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^{-1}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\left[\frac{\mathbf{u}}{c}-\frac{c^2}{v^2}\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mathbf{v}}{c}\right]\right\}^2\\ &= \frac{1}{\gamma^4\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^4}\mathbf{a}^2+\frac{1}{\gamma^4\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^6}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\left[2\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c}-2\frac{c^2}{v^2}\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\right]\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)\\ &\quad+\frac{1}{\gamma^4\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^6}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\right)^2\left[\frac{u^2}{c^2}-2\frac{c^2}{v^2}\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}+\frac{c^2}{v^2}\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma^2}\right].\end{aligned}$$

Lösen wir die Differenz auf, erhalten wir

 

$$\mathbf{a}'^2 = \frac{1}{\gamma^4\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^4}\mathbf{a}^2 + \frac{1}{\gamma^4\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^6}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\left[2\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c} - 2\frac{c^2}{v^2}\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\right]$$

$$+\frac{1}{\gamma^4\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^6}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\left[-2\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right) + 2\frac{c^2}{v^2}\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\right]$$

$$+\frac{1}{\gamma^4\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^6}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\right)^2\left[\frac{u^2}{c^2} - 2\frac{c^2}{v^2}\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2} + \frac{c^2}{v^2}\frac{(\gamma-1)^2}{\gamma^2}\right].$$

Die weitere Umformung ergibt

$$\mathbf{a}'^2 = \frac{1}{\gamma^4\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^4}\mathbf{a}^2 + \frac{1}{\gamma^4\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^6}2\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}}{c}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)$$

$$-\frac{1}{\gamma^4\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^6}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\right)^2\frac{c^2}{v^2}\left(2-\frac{2}{\gamma}\right) + \frac{1}{\gamma^4\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^6}\frac{u^2}{c^2}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\right)^2$$

$$+\frac{1}{\gamma^4\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^6}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\right)^2\frac{c^2}{v^2}\left(2-\frac{2}{\gamma}-\frac{v^2}{c^2}\right).$$

Nach entsprechendem Kürzen verbleibt

$$\mathbf{a}'^2 = \frac{1}{\gamma^4\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^4}\left[\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a}\cdot\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^{-1}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\frac{\mathbf{u}}{c} + \left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^{-2}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\right)^2\frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right]$$

$$-\frac{1}{\gamma^4\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^6}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\right)^2,$$

womit wir das obige Ergebnis bestätigen können:

$$\mathbf{a}'^2 = \frac{1}{\gamma^4\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^4}\left[\mathbf{a} + \left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^{-1}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{c}\frac{\mathbf{u}}{c}\right]^2 - \frac{1}{\gamma^4\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^6}\frac{(\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})^2}{c^2}$$

$$= -\left[\left(\frac{d^2ct}{dt'^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2\mathbf{x}}{dt'^2}\right)^2\right].$$

Die Rücktransformation sei dem Leser als Übung überlassen.

 

*Viererimpuls.* Multiplizieren wir die Vierergeschwindigkeit des ungestrichenen Systems

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt}=\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}ct'\\ \mathbf{x}'\end{pmatrix}=\frac{dt'}{dt}\begin{pmatrix}c\\ \mathbf{u}'\end{pmatrix}=\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)\begin{pmatrix}c\\ \mathbf{u}'\end{pmatrix}$$

mit der Masse *m* des ungestrichenen Systems, erhalten wir den Viererimpuls im ungestrichenen System,

$$\mathbf{p}=m\frac{d\mathbf{s}}{dt}=m'\frac{d\mathbf{s}}{dt'}=\begin{pmatrix}m'c\\ m'\mathbf{u}'\end{pmatrix}.$$

Dabei haben wir lediglich noch von den Relationen

$$m=\gamma m'\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right),\quad dt=\gamma\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)dt'$$

Gebrauch gemacht. Bilden wir hiervon das Minkowskische Betragsquadrat,

$$\mathbf{p}^2=\left(m'\frac{d\mathbf{s}}{dt'}\right)^2=m'^2\left(c^2-\mathbf{u}'^2\right),$$

kann die Impulsenergie unter Verwendung der bereits hergeleiteten Formel

$$c^2-\mathbf{u}'^2=\frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left(c^2-\mathbf{u}^2\right)$$

auf die Form

$$\mathbf{p}^2=\left(m\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right)^2=\frac{m'^2}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left(c^2-\mathbf{u}^2\right)=m^2\left(c^2-\mathbf{u}^2\right)$$

gebracht werden. Diese Größe kann nicht negativ werden, weil die Energie dem Impuls stets vorauseilt. Damit folgt sofort die Energie- und Impulserhaltung

$$\mathbf{p}^2=\frac{E^2}{c^2}-m^2\mathbf{u}^2=m^2\left(c^2-\mathbf{u}^2\right)=m'^2\left(c^2-\mathbf{u}'^2\right)=\frac{E'^2}{c^2}-m'^2\mathbf{u}'^2=\mathbf{p}'^2.$$

Wenn wir $\mathbf{u}'=0$ und entsprechend $\mathbf{u}=\mathbf{v}$ setzen, läßt sich daraus mittels der Ruhemasse $m'=m_0$ die Energie-Impuls-Beziehung ableiten,

$$\frac{E^2}{c^2}-m^2\mathbf{v}^2=\frac{m_0^2c^4}{c^2}\quad\text{bzw.}\quad E^2=m_0^2c^4+m^2\mathbf{v}^2c^2\,.$$

Substituieren wir hingegen

 

$$m' = \gamma m\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right),$$

folgt aus

$$\frac{E^2}{c^2} - m^2\mathbf{u}^2 = \gamma^2 m^2\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2\left(c^2 - \mathbf{u}'^2\right)$$

die Gleichung

$$E^2 = m^2c^4\left[\gamma^2\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2\left(1 - \frac{\mathbf{u}'^2}{c^2}\right) + \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}\right].$$

Mit der schon mehrfach bewiesenen Relation

$$\gamma^2\left(1 - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2\left(1 - \frac{\mathbf{u}'^2}{c^2}\right) = 1 - \frac{\mathbf{u}^2}{c^2}$$

erhalten wir daraus die Einsteinsche Energie-Masse-Äquivalenz $E = mc^2$. Aus der Gleichheit der quadratischen Viererimpulse

$$\frac{E^2}{c^2} - m^2\mathbf{u}^2 = \frac{E'^2}{c^2} - m'^2\mathbf{u}'^2$$

ergibt sich durch Ziehen der Wurzel auf beiden Seiten wegen

$$\left(m\frac{d\mathbf{s}}{dt}\right)^2 = \frac{E^2}{c^2} - m^2\mathbf{u}^2 \quad \text{bzw.} \quad \left(m'\frac{d\mathbf{s}'}{dt'}\right)^2 = \frac{E'^2}{c^2} - m'^2\mathbf{u}'^2$$

sogar die lineare Energie- und Impulserhaltung,

$$m\frac{d\mathbf{s}}{dt} = m'\frac{d\mathbf{s}'}{dt'}.$$

Gleichsetzen von

$$m\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{E}{c} + im\mathbf{u} \quad \text{und} \quad m'\frac{d\mathbf{s}'}{dt'} = \frac{E'}{c} + im'\mathbf{u}'$$

ergibt nach Real- und Imaginärteil getrennt die herkömmliche Energie- und Impulserhaltung

$$E' = E \quad \text{und} \quad m'\mathbf{u}' = m\mathbf{u}.$$

Multiplizieren wir hingegen die Vierergeschwindigkeit des gestrichenen Systems

$$\frac{d\mathbf{s}'}{dt'} = \frac{d}{dt'}\begin{pmatrix} ct \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \frac{dt}{dt'}\begin{pmatrix} c \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \gamma\left(1 + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)\begin{pmatrix} c \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

 

mit der Masse $m'$ des gestrichenen Systems, erhalten wir umgekehrt den Viererimpuls des gestrichenen Systems in Abhängigkeit von Variablen des ungestrichenen Systems,

$$\mathbf{p}' = m'\frac{d\mathbf{s}'}{dt'} = m\frac{d\mathbf{s}'}{dt} = \begin{pmatrix} mc \\ m\mathbf{u} \end{pmatrix}.$$

Bilden wir von dieser Gleichung das komplexe Betragsquadrat,

$$\mathbf{p}'^2 = \left(m\frac{d\mathbf{s}'}{dt}\right)^2 = m^2\left(c^2 - \mathbf{u}^2\right),$$

kann sie unter Verwendung der bereits hergeleiteten Formel

$$c^2 - \mathbf{u}^2 = \frac{1}{\gamma^2\left(1 + \dfrac{\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)^2}\left(c^2 - \mathbf{u}'^2\right)$$

auf die Form

$$\mathbf{p}'^2 = \left(m\frac{d\mathbf{s}'}{dt}\right)^2 = \frac{m^2}{\gamma^2\left(1 + \dfrac{\mathbf{u}'\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right)^2}\left(c^2 - \mathbf{u}'^2\right) = m'^2\left(c^2 - \mathbf{u}'^2\right)$$

gebracht werden. Hieraus folgt wieder der Energie- und Impulserhaltungssatz für jedes beliebige Bezugssystem,

$$\mathbf{p}'^2 = \frac{E'^2}{c^2} - m'^2\mathbf{u}'^2 = m'^2\left(c^2 - \mathbf{u}'^2\right) = m^2\left(c^2 - \mathbf{u}^2\right) = \frac{E^2}{c^2} - m^2\mathbf{u}^2 = \mathbf{p}^2.$$

Analog zum Vierervektor kann der Viererimpuls auch geschrieben werden als

$$\mathbf{p}' = \begin{pmatrix} mc \\ m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^{-1}E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{pmatrix} m'c \\ m'\mathbf{u}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^{-1}E' \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix}.$$

Mit den Vierergeschwindigkeiten

$$\begin{pmatrix} c \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \frac{d\mathbf{s}'}{dt}, \quad \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{u}' \end{pmatrix} = \frac{d\mathbf{s}}{dt'}$$

läßt sich der Viererimpuls als Erhaltungsgröße auch wie folgt darstellen:

 

$$\mathbf{p}' = m'\frac{d\mathbf{s}'}{dt'} = \begin{pmatrix} c^{-1}E \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p} = m\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \begin{pmatrix} c^{-1}E' \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix}.$$

*Viererkraft.* Die Viererkraft des ungestrichenen Systems ist die Ableitung des Viererimpulses des gestrichenen Systems nach der Zeit des ungestrichenen Systems,

$$\frac{d\mathbf{p}'}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} mc \\ m\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{dE}{dt} \\ \frac{dm\mathbf{u}}{dt} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}}{c} + i\mathbf{F}.$$

Das ist wegen

$$dt = \gamma\left(1 + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)dt'$$

äquivalent mit

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} m'c \\ m'\mathbf{u}' \end{pmatrix} = \frac{dt'}{dt}\frac{d}{dt'}\begin{pmatrix} c^{-1}E' \\ m'\mathbf{u}' \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma\left(1 + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)}\left(\frac{\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'}{c} + i\mathbf{F}'\right).$$

Umgekehrt ist die Viererkraft im gestrichenen System die Ableitung des Impulses des ungestrichenen Systems nach der Zeit des gestrichenen Systems,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt'} = \frac{d}{dt'}\begin{pmatrix} m'c \\ m'\mathbf{u}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{dE'}{dt'} \\ \frac{dm'\mathbf{u}'}{dt'} \end{pmatrix} = \frac{\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'}{c} + i\mathbf{F}',$$

was wegen

$$dt = \gamma\left(1 + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)dt'$$

äquivalent ist mit

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} m'c \\ m'\mathbf{u}' \end{pmatrix} = \frac{dt'}{dt}\left(\frac{1}{c}\frac{dE'}{dt'} + i\,\frac{dm'\mathbf{u}'}{dt'}\right) = \frac{1}{\gamma\left(1 + \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)}\left(\frac{\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'}{c} + i\mathbf{F}'\right).$$

Wenn das Quadrat des Kraft-Vierervektors eine Erhaltungsgröße ist, müssen wir zeigen können, daß

 

$$\left(\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}\right)^2-\left(\frac{dm\mathbf{u}}{dt}\right)^2=\frac{(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u})^2}{c^2}-\mathbf{F}^2=\frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\left(\frac{(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}')^2}{c^2}-\mathbf{F}'^2\right)$$

und damit

$$\mathbf{F}=\frac{\mathbf{F}'}{\gamma\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)}.$$

Gehen wir von der Newtonschen Kraftgleichung im ungestrichenen System aus,

$$\mathbf{F}=\frac{dm\mathbf{u}}{dt}=\mathbf{u}\frac{dm}{dt}+m\frac{d\mathbf{u}}{dt}=\mathbf{u}\frac{dm}{dt}+m\mathbf{a},$$

dann transformiert sich die Kraft mit den Größen Masse

$$m=\gamma m'\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right),$$

deren Ableitung

$$\frac{dm}{dt}=\frac{dm'}{dt'}+\frac{m'}{1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}}\frac{\mathbf{v}}{c^2}\cdot\frac{d\mathbf{u}'}{dt'}=\frac{dm'}{dt'}+\frac{m'}{1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}}\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'}{c^2}$$

sowie der Geschwindigkeit

$$\mathbf{u}=\frac{1}{1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}}\left\{\frac{\mathbf{u}'}{\gamma}+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\frac{\mathbf{u}'}{\gamma}+1\right]\mathbf{v}\right\}$$

und der Beschleunigung

$$\begin{aligned}\mathbf{a}&=\frac{\mathbf{a}'}{\gamma^2\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}-\frac{\gamma-1}{\gamma^3\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^3}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'}{v^2}\right)\mathbf{v}-\frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^3}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'}{c^2}\right)\mathbf{u}'\\&=\frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\left[\mathbf{a}'-\frac{\gamma-1}{\gamma}\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^{-1}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'}{v^2}\right)\mathbf{v}-\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^{-1}\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}'}{c^2}\right)\mathbf{u}'\right]\end{aligned}$$

wie folgt:

 

$$\mathbf{F}=\frac{1}{1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}}\left\{\frac{\mathbf{u}'}{\gamma}+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\frac{\mathbf{u}'}{\gamma}+1\right]\mathbf{v}\right\}\frac{dm'}{dt'}+\frac{1}{\gamma\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot m'\mathbf{a}'\right)\frac{\mathbf{u}'}{c}$$

$$+\frac{1}{\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\frac{\mathbf{u}'}{\gamma}+1\right]\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot m'\mathbf{a}'\right)\frac{\mathbf{v}}{c}+\frac{1}{\gamma\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)}m'\mathbf{a}'$$

$$-\frac{\gamma-1}{\gamma^2\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\left(\frac{\mathbf{v}}{v}\cdot m'\mathbf{a}'\right)\frac{\mathbf{v}}{v}-\frac{1}{\gamma\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\left(\frac{\mathbf{v}}{c}\cdot m'\mathbf{a}'\right)\frac{\mathbf{u}'}{c}.$$

Die Terme proportional zu $\mathbf{u}'$ kürzen sich sofort heraus. Nach entsprechender Umformung der restlichen Ausdrücke verbleibt

$$\mathbf{F}=\frac{1}{\gamma\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)}\left\{m'\mathbf{a}'+\mathbf{u}'\frac{dm'}{dt'}+(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v}\cdot\left(\mathbf{u}'\frac{dm'}{dt'}\right)\frac{\mathbf{v}}{v}+\gamma\mathbf{v}\frac{dm'}{dt'}\right\}$$

$$+\frac{1}{\gamma\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}+\frac{1}{\gamma}\left(1+\gamma^2\frac{v^2}{c^2}-\gamma\right)\right]\left(\frac{\mathbf{v}}{v}\cdot m'\mathbf{a}'\right)\frac{\mathbf{v}}{v}.$$

Dies läßt sich weiter vereinfachen zu

$$\mathbf{F}=\frac{1}{\gamma\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)}\left(\mathbf{u}'\frac{dm'}{dt'}+m'\mathbf{a}'+\mathbf{v}\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\left(\mathbf{u}'\frac{dm'}{dt'}+m'\mathbf{a}'\right)+\gamma\frac{dm'}{dt'}\right]\right).$$

Substituieren wir die Kraft gemäß

$$\mathbf{F}'=\mathbf{u}'\frac{dm'}{dt'}+m'\mathbf{a}',$$

ergibt sich

$$\mathbf{F}=\frac{1}{\gamma\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)}\left(\mathbf{F}'+\mathbf{v}\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}'}{v^2}+\gamma\frac{dm'}{dt'}\right]\right).$$

Schließlich müssen wir noch die Masse

$$m'=\frac{m\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

 

nach der Zeit $t'$ im gestrichenen System differenzieren. Mittels der Identität

$$\sqrt{1-\frac{\mathbf{u}'^2}{c^2}}=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}}{1-\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{c^2}}$$

formen wir zunächst wie folgt um:

$$m'=\frac{m\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=\frac{m\sqrt{1-\frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{u}'^2}{c^2}}}.$$

Die Ableitung der Masse in Variablen des gestrichenen Systems ergibt sich dann zu

$$\frac{dm'}{dt'}=\frac{m\sqrt{1-\frac{\mathbf{u}^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{\mathbf{u}'^2}{c^2}}^3}\frac{1}{c^2}\mathbf{u}'\cdot\frac{d\mathbf{u}'}{dt'}=\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}^3}\frac{1}{c^2}\mathbf{u}'\cdot m'\mathbf{a}'=\frac{1}{1-\frac{u'^2}{c^2}}\frac{1}{c^2}\mathbf{u}'\cdot m'\mathbf{a}'.$$

Wegen $\mathbf{u}'(\mathbf{u}'\cdot m'\mathbf{a}')=(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{u}')m'\mathbf{a}'$ kann die Kraft nun wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'&=m'\mathbf{a}'+\mathbf{u}'\frac{dm'}{dt'}=m'\mathbf{a}'+\frac{m'}{c^2}\frac{\mathbf{u}'(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{a}')}{1-\frac{u'^2}{c^2}}=m'\mathbf{a}'+\frac{m'}{c^2}\frac{(\mathbf{u}'\cdot\mathbf{u}')\mathbf{a}'}{1-\frac{u'^2}{c^2}}\\&=\frac{1}{1-\frac{u'^2}{c^2}}\left[m'\mathbf{a}'\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)+\frac{u'^2}{c^2}m'\mathbf{a}'\right]=\frac{m'\mathbf{a}'}{1-\frac{u'^2}{c^2}}.\end{aligned}$$

Umformung ergibt

$$\mathbf{F}'\left(1-\frac{u'^2}{c^2}\right)=m'\mathbf{a}'\quad\text{bzw.}\quad\mathbf{F}'=m'\mathbf{a}+\frac{u'^2}{c^2}\mathbf{F}',$$

und Multiplikation mit $\mathbf{u}'$ liefert das Skalarprodukt

$$\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'=m'\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}'+\frac{u'^2}{c^2}\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}',$$

woraus am Ende die Identität der Massenänderung im gestrichenen System folgt:

$$\frac{dm'}{dt'}=\frac{\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'-m'\mathbf{a}\cdot\mathbf{u}'}{u'^2}=\frac{\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'}{c^2}.$$

Eingesetzt ergibt sich die Rücktransformation der Kraft,

 

$$\mathbf{F}=\frac{1}{\gamma\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)}\left(\mathbf{F}'+\mathbf{v}\left[\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}'}{v^2}+\gamma\frac{\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right]\right).$$

Wir können nun die Kraft quadrieren,

$$\mathbf{F}^2=\frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\left(\mathbf{F}'+\mathbf{v}\left[\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}'}{v^2}+\gamma\frac{\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right]\right)^2=\frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}$$
$$\times\left\{\mathbf{F}'^2+2\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\left[\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}'}{v^2}+\gamma\frac{\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right]+v^2\left[\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}'}{v^2}+\gamma\frac{\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right]^2\right\},$$

und die quadratischen Terme auflösen,

$$\mathbf{F}^2=\frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\left\{\mathbf{F}'^2+2\left(\gamma-1\right)\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\right)\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}'\right)}{v^2}+2\gamma\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\right)\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right)}{c^2}\right.$$
$$\left.+\left(\gamma-1\right)^2\frac{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}'\right)^2}{v^2}+2\gamma\left(\gamma-1\right)\frac{\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}'\right)\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right)}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}\gamma^2\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right)^2}{c^2}\right\}.$$

Übersichtlicher geschrieben erkennen wir, daß wir in dem folgenden Ausdruck kürzen können,

$$\mathbf{F}^2=\frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\left\{\mathbf{F}'^2+\left(2\gamma-2\right)\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\right)^2}{v^2}+2\gamma\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right)\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\right)}{c^2}\right.$$
$$\left.+\left(\gamma^2-2\gamma+1\right)\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\right)^2}{v^2}+\left(2\gamma^2-2\gamma\right)\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right)\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\right)}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}\gamma^2\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right)^2}{c^2}\right\}.$$

Mithin verbleibt

$$\mathbf{F}^2=\frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\left[\mathbf{F}'^2+\left(\gamma^2-1\right)\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\right)^2}{v^2}+2\gamma^2\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right)\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\right)}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}\gamma^2\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right)^2}{c^2}\right]$$
$$=\frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\left[\mathbf{F}'^2+\left(\gamma^2-1\right)\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\right)^2}{v^2}+2\gamma^2\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right)\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\right)}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}\gamma^2\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right)^2}{c^2}\right].$$

Mit dem Energieanteil der Viererkraft verfahren wir ähnlich:

 

$$\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}=\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}}{c}=\frac{1}{\gamma^2 c\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\left\{\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'+\left[\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}'}{v^2}+\gamma\frac{\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right]\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'\right.$$

$$\left.+\left[\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{v^2}+\gamma\right]\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}+\left[\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{F}'}{v^2}+\gamma\frac{\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right]\left[\left(\gamma-1\right)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{v^2}+\gamma\right]\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right\}.$$

Multiplizieren wir alle Beiträge aus und ordnen sie übersichtlich an, erhalten wir den Ausdruck

$$\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}=\frac{1}{\gamma^2 c\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\left\{\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'+2\left(\gamma-1\right)\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\right)\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'\right)}{v^2}+\gamma\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right)\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'\right)}{c^2}+\gamma\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\right.$$

$$\left.+\left(\gamma-1\right)^2\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\right)\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'\right)}{v^2}+\gamma\left(\gamma-1\right)\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right)\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'\right)}{c^2}+\gamma\left(\gamma-1\right)\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}+\gamma^2\frac{v^2}{c^2}\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right\},$$

den wir durch Kürzen wie folgt vereinfachen können,

$$\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}=\frac{1}{\gamma^2 c\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\left\{\left[1+\gamma^2\frac{v^2}{c^2}\right]\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'+\left(\gamma^2-1\right)\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\right)\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'\right)}{v^2}\right.$$

$$\left.+\gamma^2\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right)\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'\right)}{c^2}+\gamma^2\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\right\}.$$

Schließlich ergibt sich

$$\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}=\frac{1}{c\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\left[\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'+\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\right)\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)\right]=\frac{1}{1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}}\left(\frac{\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'}{c}+\frac{\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}}{c}\right).$$

Quadrieren wir die beiden Terme und subtrahieren sie voneinander, folgt

$$\left(\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}\right)^2-\left(\frac{dm\mathbf{u}}{dt}\right)^2=\frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\left[\gamma^2\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right)^2}{c^2}+2\gamma^2\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right)\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\right)}{c^2}+\gamma^2\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\right)^2}{c^2}\right.$$

$$\left.-\mathbf{F}'^2+\left(\gamma^2-1\right)\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\right)^2}{v^2}-2\gamma^2\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right)\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{v}\right)}{c^2}-\frac{v^2}{c^2}\gamma^2\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right)^2}{c^2}\right].$$

Nach Kürzen der entsprechenden Beiträge verbleibt die Bestimmungsgleichung

$$\left(\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}\right)^2-\left(\frac{dm\mathbf{u}}{dt}\right)^2=\frac{1}{\gamma^2\left(1+\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}'}{c^2}\right)^2}\left(\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right)^2}{c^2}-\mathbf{F}'^2\right).$$

 

Damit hätten wir den Beweis vom ungestrichenen ins gestrichene System erbracht. Der Beweis vom gestrichenen ins ungestrichene System geht von der Viererkraft des gestrichenen Systems mit Hilfe der Ableitung

$$\frac{dt}{dt'}=\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)}$$

aus,

$$\frac{d\mathbf{p}'}{dt'}=\frac{d}{dt'}\begin{pmatrix} mc \\ m\mathbf{u}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{c}\frac{dE}{dt'} \\ \frac{dm\mathbf{u}}{dt'}\end{pmatrix}=\frac{dt}{dt'}\left(\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}+i\frac{dm\mathbf{u}}{dt}\right)=\frac{1}{\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)}\left(\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}}{c}+i\mathbf{F}\right).$$

Wegen des Impulserhaltungssatzes muß dieser Ausdruck gleich sein zu

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt'}=\frac{d}{dt'}\begin{pmatrix} m'c \\ m\mathbf{u}'\end{pmatrix}=\frac{1}{c}\frac{dE'}{dt'}+i\frac{dm'\mathbf{u}'}{dt'}=\frac{\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'}{c}+i\mathbf{F}'.$$

Um den Beweis zu führen, erweitern wir die in Aufgabe 180 hergeleitete Beziehung

$$\frac{dm}{dt}=\frac{(\mathbf{F}-m\mathbf{a})\cdot\mathbf{u}}{u^2}=\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}}{c^2}$$

auf die Energie, deren Differential $dE=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{u}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}dt$ sich wie folgt umformen läßt:

$$\frac{dE}{dt}=\frac{dmc^2}{dt}=\frac{c^2}{u^2}(\mathbf{F}-m\mathbf{a})\cdot\mathbf{u}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}.$$

Damit können wir die Ableitung der Energie in der Ausgangsgleichung substituieren,

$$\left(\frac{1}{c}\frac{dE}{dt'}\right)^2-\left(\frac{dm\mathbf{u}}{dt'}\right)^2=\left(\frac{dt}{dt'}\right)^2\left[\left(\frac{1}{c}\frac{dE}{dt}\right)^2-\left(\frac{dm\mathbf{u}}{dt}\right)^2\right]=\frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left(\frac{(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u})^2}{c^2}-\mathbf{F}^2\right).$$

Dieses Ergebnis muß wegen

$$\frac{1}{c}\frac{dE'}{dt'}=\frac{\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'}{c}.$$

mit der quadratischen Viererkraft im bewegten System übereinstimmen,

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{dE'}{dt'}\right)^2-\left(\frac{dm'\mathbf{u}'}{dt'}\right)^2=\frac{(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}')^2}{c^2}-\mathbf{F}'^2.$$

Multiplikation von Kraft

 

$$\mathbf{F}' = \frac{1}{\gamma\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)}\left(\mathbf{F}+\mathbf{v}\left[\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{v^2}(\gamma-1)-\gamma\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right]\right)$$

und Geschwindigkeit

$$\mathbf{u}' = \frac{1}{1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}\left\{\frac{\mathbf{u}}{\gamma}+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}\cdot\frac{\mathbf{u}}{\gamma}-1\right]\mathbf{v}\right\}$$

führt auf die Gleichung

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}' &= \frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left(\mathbf{F}+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{v^2}-\gamma\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right]\mathbf{v}\right)\left\{\mathbf{u}+\left[(\gamma-1)\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{v^2}-\gamma\right]\mathbf{v}\right\}\\ &= \frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left[1+\gamma^2\frac{v^2}{c^2}-\gamma^2\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right]+\frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\left[\frac{\gamma^2-1}{v^2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}-\gamma^2\right],\end{aligned}$$

die wir auf ihre endgültige Form

$$\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}' = \frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left[\gamma^2\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)-\gamma^2\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)\right]=\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}-\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}}$$

Bringen können. Der zeitliche Anteil der Viererkraft stellt sich dann wie folgt dar,

$$\frac{(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}')^2}{c^2}=\frac{(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}-\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})^2}{c^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}=\frac{(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u})^2-2(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})+(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})^2}{c^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}.$$

Den räumlichen Anteil erhalten wir durch Quadrieren der Kraft im bewegten System,

$$\begin{aligned}\mathbf{F}'^2 &= \frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left(\mathbf{F}+\mathbf{v}\left[\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}{v^2}(\gamma-1)-\gamma\frac{\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right]\right)^2\\ &= \frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left\{\mathbf{F}^2+2(\gamma-1)\frac{(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})^2}{v^2}-2\gamma\frac{(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})}{c^2}\right.\\ &\quad\left.+(\gamma-1)^2\frac{(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})}{v^2}-2\gamma(\gamma-1)\frac{(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u})(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v})}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}\gamma^2\frac{(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u})^2}{c^2}\right\}.\end{aligned}$$

Nach Kürzen entsprechender Terme verbleibt

$$\mathbf{F}'^2 = \frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left[\mathbf{F}^2 + \left(\gamma^2-1\right)\frac{\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\right)^2}{v^2} - 2\gamma^2\frac{\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}\right)\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\right)}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\gamma^2\frac{\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}\right)^2}{c^2}\right].$$

Subtrahieren wir die beiden Anteile, ergibt sich

$$\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right)^2}{c^2} - \mathbf{F}'^2 = \frac{1}{\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left[\frac{\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}\right)^2}{c^2} - 2\frac{\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}\right)\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\right)}{c^2} + \frac{\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\right)^2}{c^2}\right]$$
$$-\frac{1}{\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left[\frac{\mathbf{F}^2}{\gamma^2} + \frac{\gamma^2-1}{v^2}\frac{\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\right)^2}{\gamma^2} - 2\frac{\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}\right)\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\right)}{c^2} + \frac{v^2}{c^2}\frac{\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}\right)^2}{c^2}\right].$$

Wie man sieht, hebt sich der gemischte Term weg, womit wir nach einiger Umformung unser gewünschtes Resultat erhalten:

$$\frac{\left(\mathbf{F}'\cdot\mathbf{u}'\right)^2}{c^2} - \mathbf{F}'^2 = \frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left[\gamma^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}\right)^2}{c^2} + \frac{\gamma^2}{c^2}\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\right)^2 - \frac{\gamma^2}{c^2}\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\right)^2 - \mathbf{F}^2\right]$$
$$= \frac{1}{\gamma^2\left(1-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}}{c^2}\right)^2}\left(\frac{\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}\right)^2}{c^2} - \mathbf{F}^2\right).$$

Damit haben wir gezeigt, daß auch der umgekehrte Weg zum Ziel führt und die quadratische Viererkraft invariant ist,

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{dE'}{dt'}\right)^2 - \left(\frac{dm'\mathbf{u}'}{dt'}\right)^2 = \left(\frac{dt}{dt'}\right)^2\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dm\mathbf{u}}{dt}\right)^2\right] = \left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{dE}{dt'}\right)^2 - \left(\frac{dm\mathbf{u}}{dt'}\right)^2\right].$$

Damit bleibt das quadratische infinitesimale Impulselement erhalten:[5]

$$d\mathbf{p}^2 = \left(\frac{dE'}{c}\right)^2 - \left(dm'\mathbf{u}'\right)^2 = \left(\frac{dE}{c}\right)^2 - \left(dm\mathbf{u}\right)^2 = d\mathbf{p}'^2$$

qed

[5] Bedauerlicherweise konnten wir, wie wir das beim Ortsvektor getan haben, für den dreidimensionalen Impuls kein eigenes Formelzeichen einführen, da dies nur Verwirrung gestiftet hätte.

 