Aufgabe: Erläutern Sie, inwiefern die Problematik des Räuber-Beute-Systems und das der Endlagerung, auch wenn man es damals noch nicht so nannte, fest verankerter Bestandteil im Denken des klassischen Griechenlands war.

Lösung: In der griechischen Mythologie war die Hydra ein gefährliches Lebewesen mit 9 Köpfen, von denen einer noch dazu unsterblich war. Die zweite der 12 Aufgaben, die man dem Herakles stellte, war, die Hydra unschädlich zu machen, ein Ungeheuer, das großen Schaden anrichtete, indem es die Viehherden fraß. Die Schwierigkeit dabei war, daß der Hydra, sowie man ihr einen Kopf abschlug, sofort zwei neue nachwuchsen.

Herakles tat folgendes. Immer wenn er der Hydra einen Kopf abschlug, eilte sein Wagenlenker Iolaos mit einer Fackel herbei und brannte die Wunde mit dem Feuer aus, so daß die Köpfe nicht nachwachsen konnten. Das unsterbliche Haupt aber, welches er zuletzt abschlug, vergrub er und wälzte einen schweren Felsbrocken darüber. Damit war die Gefahr ein für allemal gebannt.

In erstaunlicher Weise hat also Herakles das Räuber-Beute-Problem erkannt und auch gelöst. Mathematisch läßt es sich anhand der Lotka-Volterra-Gleichungen wie folgt formulieren:

$$\frac{dN_1}{dt} = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2), \qquad \frac{dN_2}{dt} = -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1).$$

Die darin vorkommenden Variablen und Konstanten haben folgende Bedeutung:

Symbol	Bedeutung
N_1	Anzahl der Köpfe der Hydra (10)
N_2	Anzahl der Helden (2)
ε_1	Zuwachsrate der Köpfe
γ_1	Sterberate der Köpfe pro Held (5 pro Held)
γ_2	Reproduktionrate der Helden (null)
ε_2	Sterberate der Helden (null)

Die Gesamtzahl der Köpfe kann zu Beginn mit 10 angenommen werden, weil der Umstand, daß pro abgeschlagenem Kopf zwei Köpfe nachwuchsen, dem Herakles erst bekannt wurde, nachdem der erste abgeschlagen war. Das obige Gleichungssystem vereinfacht sich also zu

$$\frac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 N_1 - \gamma_1 N_2 N_1, \qquad \frac{dN_2}{dt} = 0,$$

wobei wegen $N_2 = 2$ nur noch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zu lösen ist. Sie lautet

$$\frac{dN_1}{dt} = -(2\gamma_1 - \varepsilon_1)N_1.$$

Das entsprechende Integral ist gegeben durch

$$\int_{N_{1,0}}^{N_1} \frac{dN_1}{N_1} = -(2\gamma_1 - \varepsilon_1)\int_0^t dt.$$

Damit erhalten wir die vollständige Lösung in Form einer Exponentialfunktion:

$$\ln\frac{N_1}{N_{1,0}} = -(2\gamma_1 - \varepsilon_1)t \quad \text{bzw.} \quad N_1(t) = N_{1,0}e^{-(2\gamma_1-\varepsilon_1)t}.$$

Im Zeitraum T der Handlung sinkt die Zahl der Köpfe auf unter 1, d.h. die Zeit T ist genau diejenige Zeit, zu der der letzte Kopf fällt:

$$N_1(T) = N_{1,0}e^{-(2\gamma_1-\varepsilon_1)T} = 1$$

oder wahlweise 0. Die Kampfdauer T ist demnach gegeben durch

$$T = \frac{1}{2\gamma_1 - \varepsilon_1}\ln\frac{N_{1,0}}{N_1(T)} \approx \frac{2{,}303}{2\gamma_1 - \varepsilon_1}.$$

Daraus ergibt sich während der gesamten Kampagne eine Zuwachsrate[1] der Köpfe ε_1 von

$$\varepsilon_1 = \frac{2\gamma_1 T - 2{,}3}{T} = \frac{7{,}7}{T},$$

womit die endgültigen Lösungen des Räuber-Beute-Systems lauten:

$$N_1(t) = 10e^{-2{,}3t/T}, \qquad N_2(t) = 2.$$

Die Anfangsbedingungen waren

$$N_1(0) = 10, \qquad N_2(0) = 2,$$

die Endbedingungen sind

$$N_1(T) = 0, \qquad N_2(T) = 2.$$

Natürlich verfügten die Griechen noch nicht über die ausgefeilte Infinitesimalrechnung, doch ist diese für das Verständnis auch gar nicht entscheidend. Wichtig ist ausschließlich zu verstehen, wie ein bestehendes Problem einer definitiven Lösung zugeführt werden kann. In späteren Jahrhunderten, vor allem während der Völkerwanderung, ging das antike Wissen zum Großteil wieder verloren. Mehr als zwei Jahrtausende hat es gedauert, bis es wiederentdeckt wurde. In dieser Zeit wurden sinnlose Kriege geführt, über deren Ausgang man sich bei entsprechender Kenntnis des Sachverhalts leicht vorab hätte informieren können.

[1] Da am Ende formal ein Kopf übrigbleibt, sind natürlich pro Held 9 Köpfe nachgewachsen, nach Adam Riese also insgesamt 18.