Aufgabe: Beweisen Sie, daß die Spezielle Relativitätstheorie mit Blick auf die „spukhafte Fernwirkung“ nicht im Widerspruch zur Quantenmechanik steht, und daß letztere deterministisch ist.

Beweis: In äquivalenter Formulierung zur Quantenmechanik bedeutet dies, daß verschränkte Photonen hinsichtlich ihrer Quanteneigenschaften bei einer Übertragung über beliebige Entfernungen keine Distanz in Raum und Zeit zurücklegen müssen, d.h. daß entkoppelte Strahlung grundsätzlich lichtartig ist $(ds = 0)$. Nach den Aussagen der Speziellen Relativitätstheorie gilt für das differentielle Wegelement die Relation

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Alles Licht, das wir aus dem Weltall empfangen, ist gleich alt bzw. gleichzeitig entstanden, genauer gesagt 380.000 Jahre nach dem Urknall. Licht, das früher datiert, gibt es nicht, weil noch keine Atome vorhanden waren, die Licht hätten aussenden können, und Protonen und Elektronen, die noch nach dem Urknall hätten entstehen können, kann es nach den Erhaltungssätzen ebenfalls nicht geben. Wandeln wir also die Terme des differentiellen Wegelements in Differenzen um,

$$c^2 \Delta t^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 \equiv \Delta r^2,$$

so folgt im Falle von Lichtartigkeit wegen $\Delta t = 0$ auch $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$. Wir müssen also, um im vierdimensionalen Raum von einem Ort $\mathbf{r}_1$ zu einem Ort $\mathbf{r}_2$ zu gelangen, weder Raum noch Zeit überbrücken, weil beide Orte auf derselben Sphäre der Gleichzeitigkeit liegen. Das folgt auch direkt aus den Aussagen der Quantenmechanik, die eine nichtlokale Theorie ist. Analog gilt

$$\frac{\Delta E^2}{c^2} = \Delta p_x^2 + \Delta p_y^2 + \Delta p_z^2 \equiv \Delta p^2.$$

Multiplizieren wir beide Ausdrücke, erhalten wir die Heisenbergschen Unschärferelationen

$$\Delta r \Delta p = \Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}.$$

In Vierernotation stellen sich Raumzeit und Impulsenergie demnach wie folgt dar:

$$(x, y, z, ict) \quad \text{und} \quad \left(p_x, p_y, p_z, i\frac{E}{c} \right).$$

Damit können wir zugleich ihre Differenzen angeben:

$$(\Delta x, \Delta y, \Delta z, ic\Delta t) \quad \text{bzw.} \quad \left(\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z, i\frac{\Delta E}{c} \right).$$

Das Skalarprodukt dieser beiden Vierervektoren läßt sich dann schreiben als

$$\Delta\mathbf{r}\cdot\Delta\mathbf{p} = \Delta x\Delta p_x + \Delta y\Delta p_y + \Delta z\Delta p_z + i^2\Delta t\Delta E \geq 3\frac{\hbar}{2} - \frac{\hbar}{2} = \hbar.$$

Das liefert den Beweis, daß Raum- und Impulsdifferenzen wegen des Planckschen Wirkungsquantums nicht orthogonal zueinander sind und beide Vektoren daher linear abhängige Elemente des vierdimensionalen Minkowski-Raums darstellen.

Die Unschärferelation gilt prinzipiell auch für Mehrteilchensysteme. Im Falle eines nicht separablen, verschränkten Zustands eines Zweiteilchensystems heißt das

$$\begin{aligned}\hbar &= \Delta\left(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2\right)\cdot\Delta\left(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2\right) = \left(\Delta\mathbf{r}_1+\Delta\mathbf{r}_2\right)\cdot\left(\Delta\mathbf{p}_1+\Delta\mathbf{p}_2\right)\\ &= \Delta\mathbf{r}_1\cdot\left(\Delta\mathbf{p}_1+\Delta\mathbf{p}_2\right) + \Delta\mathbf{r}_2\cdot\left(\Delta\mathbf{p}_1+\Delta\mathbf{p}_2\right).\end{aligned}$$

Wenn nun an Teilchen 1 eine Ortsmessung durchgeführt wird, verliert die Wellenfunktion ihre Unschärfe,[1] d.h. mit $\Delta\mathbf{r}_1 = 0$ wird sie gleich eins und ist null überall sonst. Somit überlebt[2] in obiger Gleichung nur der Term

$$\Delta\mathbf{r}_2\cdot\left(\Delta\mathbf{p}_1+\Delta\mathbf{p}_2\right) = \hbar.$$

Führt man anschließend an Teilchen 2 eine Messung der zweiten Observablen durch, nämlich des Impulses, verliert auch dieser seine Unschärfe, d.h. $\Delta\mathbf{p}_1+\Delta\mathbf{p}_2 = 0.$ Im Schwerpunktsystem der Singularität folgt aufgrund der Impulserhaltung aus $\Delta\mathbf{p}_{1,2} = \mathbf{p}_{1,2} - \mathbf{p}_0$ der Ausdruck

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{p}_1+\mathbf{p}_2\right) = \mathbf{p}_0 = 0.$$

Damit wird der Impuls des ersten Teilchens bis auf das Vorzeichen voll auf Teilchen 2 übertragen, d.h. $\mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_1.$ Die Welt verschränkter quantenmechanischer Teilchen ist demnach vollkommen deterministisch oder wie Einstein es ausgedrückt hat: „Gott würfelt nicht“.

Seien also

$$\left(x_1, y_1, z_1, ict_1\right) \quad \text{und} \quad \left(x_2, y_2, z_2, ict_2\right)$$

zwei Viererereignisse in Raum und Zeit nach dem Urknall. Dann sind die differentiellen Wegelemente gegeben durch

$$\Delta s_{1,2}^2 = c^2\Delta t_{1,2}^2 - \Delta x_{1,2}^2 - \Delta y_{1,2}^2 - \Delta z_{1,2}^2.$$

Finden diese beiden Ereignisse gleichzeitig statt, d.h. gilt $\Delta t_1 = \Delta t_2,$ so folgt aus der Lichtartigkeit $\Delta s_1 = \Delta s_2 = 0$ die Nichtlokalität der Speziellen Relativitätstheorie

[1] d.h. die Wellenfunktion kollabiert
[2] d.h. nach dem No-Cloning-Theorem wird der Zustand des Quellsystems zwangsläufig zerstört

$$\Delta x_1^2 + \Delta y_1^2 + \Delta z_1^2 = \Delta x_2^2 + \Delta y_2^2 + \Delta z_2^2,$$

d.h. beide Ereignisse finden auch am selben Ort statt, egal wie weit entfernt sie sich zueinander auf der Sphäre der Gleichzeitigkeit in drei Dimensionen befinden mögen. Das alles ist nur möglich, wenn die Welt, in der wir leben, eine Singularität darstellt, mithin die vierdimensionale Raumzeit und die Impulsenergie schwach miteinander korreliert und damit auch nicht lokal[3] sind. Auch der reziproke Raum stellt eine Singularität dar:

$$\Delta p_{x,1}^2 + \Delta p_{y,1}^2 + \Delta p_{z,1}^2 = \Delta p_{x,2}^2 + \Delta p_{y,2}^2 + \Delta p_{z,2}^2,$$

d.h. die beiden Ereignisse finden in bezug auf den Urknall gleichenergetisch statt, und es muß gelten: $\Delta E_1 = \Delta E_2$. In vier Dimensionen existieren nämlich Raum und Zeit als separate Größen schlichtweg nicht, genausowenig wie Impuls und Energie.

Die Welt ist demnach eine kausale Abfolge lichtartiger Zustände[4] $\Delta s \geq 0$, für die der Zweite Hauptsatz der Thermodynamik gilt:

$$\Delta U = \Delta W + \Delta Q = -p\Delta V + T\Delta S.$$

In jedem lichtartigen Zustand sind Druck p und Temperatur T des Universums konstant. Die Natur ist stets bestrebt, einen Gleichgewichtszustand einzunehmen, daher muß die Entropie S zunehmen oder gleichbleiben, d.h. es gilt $\Delta S \geq 0$. Die Größe ΔS ist hier nicht mit dem differentiellen Wegelement Δs zu verwechseln.[5] Also muß sich der dreidimensionale Raum ausdehnen, womit $\Delta V > 0$ gelten muß. Dabei wird Expansionsarbeit verrichtet,

$$\Delta W = -p\Delta V = -\text{const} = -\Delta S.$$

Wenn also durch die Ausdehnung das Volumen des Alls größer wird und der Druck dabei abnimmt, d.h. $\Delta p < 0$, kann nach der idealen Gasgleichung[6] und dem Zweiten Hauptsatz die Temperatur ebenfalls nur abnehmen. Das folgt für $\Delta S = -V\Delta p + nR\Delta T = \text{const}$ aus

$$-p\Delta V - V\Delta p + nR\Delta T = -p\Delta V + T\Delta S = 0.$$

Die Änderung der Entropie beruht daher auf keiner speziellen Wechselwirkung und gilt auch für quantenmechanische Systeme, zumal man ja annehmen kann, daß die Spins schon beim Urknall entstanden sind. Daher ist die sogenannte Teleportation nichts anderes als eine nichtlokale quantenmechanische Entropiewirkung.

Damit ist die Lokalität der Speziellen Relativitätstheorie, wie wir oben gezeigt haben, aufgehoben. Die Quantenmechanik ihrerseits verstößt ohnehin gegen die Lokalität, denn in der Quantentheorie gilt ausdrücklich strenge Nichtlokalität, was einen Widerspruch zur Lokalität der Speziellen Relativitätstheorie darstellt. Im Augenblick des Auffindens eines Elektrons

[3] Was im übrigen auch für verschränkte Photonen gilt
[4] Das Größerzeichen gilt für die sogenannten zeitartigen Zustände.
[5] Obwohl beide gleiche Auswirkungen haben
[6] Wir verwenden hier für den Druck traditionell das gleiche Symbol wie oben für den Impuls.

wird die Wahrscheinlichkeit am gefundenen Ort gleich eins, überall sonst sinkt sie auf null ab. Dieser Übergang wird als Kollaps der Wellenfunktion bezeichnet.

Die Annahme zweier anfänglich direkt miteinander wechselwirkender und sich darauf weit voneinander entfernender Teilchen ist eben in vier Dimensionen nicht richtig. Die Teleportation findet nämlich in vier Dimensionen überhaupt nicht statt, da Sender und Empfänger sich zur selben Zeit am selben Ort befinden. Einstein sprach in diesem Zusammenhang von „spukhafter Fernwirkung“, die es in vier Dimensionen aber wie gesagt nicht gibt. Raumzeit und Impulsenergie[7] sind als komplementäre Meßgrößen aufgrund des verbleibenden Planckschen Wirkungsquantums nicht zueinander orthogonal, d.h. sie können sich, wie wir oben gezeigt haben und zumal sie nicht linear unabhängig sind, aufgrund der Verschränkung gegenseitig beeinflussen. Das bedeutet auch, daß man sie in jeweils separierten Räumen aufgrund unterschiedlicher Wellenfunktionen und trotz der Gültigkeit der Unschärferelation gleichzeitig messen kann. Eine physikalische Theorie ist realistisch, wenn Messungen nur solche Eigenschaften ablesen, die unabhängig von der Messung vorliegen, wenn also das Ergebnis jeder denkbaren Messung schon feststeht, bevor es durch die Messung bekannt wird. Bei verschränkten Photonenpaaren ist die Verletzung der Bellschen Ungleichung gemessen worden.[8] Die beobachteten Polarisationseigenschaften solcher Paare stimmen zwar mit der Quantenmechanik überein, sind aber nicht mit der Annahme von Realität und Lokalität verträglich. Nur so ist es möglich, daß Quanteneigenschaften ohne Übertragungsweg von A nach B gelangen und ein vorhandenes Quantenobjekt wegen der prinzipiellen Nichtunterscheidbarkeit von gleichartigen Teilchen am „Zielort“ vollständig neu realisieren können.

Sei etwa der Ausgangszustand ein Gemisch aus positiven und negativen Spins. Durch Messung z. B. eines negativen Spins an System 1 verschwinden alle Komponenten des Ausgangszustands, die den Eigenvektor zu positivem Spin bei Teilchen 1 enthalten. Der Zustand geht also über in negativen Spin, d. h. an Teilchen 2 wird eine weitere Messung des Spins mit Sicherheit positiven Spin ergeben. Könnte also ein Beobachter von Teilchen 2 exakte Kopien vom Quantenzustand des ersten Teilchens anfertigen, könnte er tatsächlich feststellen, welche Observable dessen Beobachter gemessen hat. Die Einzelmessung ergibt zwar für sich genommen ein nicht vorhersagbares Ergebnis, aber wenn das Ergebnis der anderen Messung einmal bekannt ist, kann auch die Korrelation festgestellt werden.

Die Messung der Korrelation zwischen den Teilchen wird durch den sogenannten Bell- bzw. CHSH-Operator[9]

$$\hat{B} = \hat{a}\left(\hat{b} + \hat{b}'\right) + \hat{a}'\left(\hat{b} - \hat{b}'\right)$$

beschrieben, dessen Eigenwerte bzw. mögliche Meßwerte teilweise außerhalb der Grenzen liegen, die nach klassischen Vorstellungen über Raum, Zeit und Kausalität für solche Korrelationen gelten. Wenn also a und a' zweiwertige Variablen für das erste und b und b' analoge

[7] Als Analogon zur Raumzeit
[8] womit Einsteins Konzept widerlegt wurde
[9] Clauser, Horne, Shimony, Holt

Variablen für das zweite System darstellen, sind die zweiwertigen Observablen hinsichtlich ihrer Darstellung durch bestimmte Basisvektoren Hermitesche 2×2-Matrizen der Form

$$\begin{aligned}\hat{a} &= \operatorname{diag}\left(A_1, A_2\right), \quad \hat{b} = \operatorname{diag}\left(B_1, B_2\right), \\ \hat{a}' &= \operatorname{diag}\left(A_1', A_2'\right), \quad \hat{b}' = \operatorname{diag}\left(B_1', B_2'\right).\end{aligned}$$

Durch Paulische Spin-Matrizen ausgedrückt können die Diagonalelemente wie folgt gewählt werden:

$$\begin{aligned}&A_1 = A_2 = \sigma_x, && A_1' = A_2' = \sigma_y, \\ &B_1 = B_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_x + \sigma_y\right), && B_1' = B_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_x - \sigma_y\right),\end{aligned}$$

wobei die Paulischen Matrizen gegeben sind durch

$$\begin{aligned}\sigma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|, \\ \sigma_z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|, \\ \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|, \\ \sigma_y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix} = -i\left(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|\right).\end{aligned}$$

Dabei gilt

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \sigma_0.$$

Die Operatoren des ungestrichenen Systems sind damit gegeben durch

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \end{pmatrix}$$

und die des gestrichenen lauten

$$\hat{a}' = \begin{pmatrix} \sigma_y & 0 \\ 0 & \sigma_y \end{pmatrix}, \quad \hat{b}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_x - \sigma_y\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sigma_x - \sigma_y\right) \end{pmatrix}.$$

Bei Spin-1/2-Teilchen bezeichnet man die Basiszustände in Dirac-Schreibweise gewöhnlich mit $|0\rangle$ (Spin-up) und $|1\rangle$ (Spin-down). Mit den Zeilen- und Spaltenvektoren

$$\langle 0| = (1, 0), \quad |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle 1| = (0, 1), \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und mit Hilfe der Relationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(1, 0) = |0\rangle\langle 0|, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(0, 1) = |1\rangle\langle 1|,$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}(0, 1) = |0\rangle\langle 1|, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}(1, 0) = |1\rangle\langle 0|$$

lassen sich die Pauli-Matrizen alternativ wie folgt ausdrücken:

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|,$$
$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|,$$
$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|,$$
$$\sigma_y = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -i\left(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|\right).$$

Schließlich können wir die Operatoren selbst schreiben als

$$\hat{a} = \begin{pmatrix} |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| & 0 \\ 0 & |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| \end{pmatrix},$$
$$\hat{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - i\left(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|\right) & 0 \\ 0 & |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| - i\left(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|\right) \end{pmatrix},$$
$$\hat{a}' = \begin{pmatrix} -i\left(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|\right) & 0 \\ 0 & -i\left(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|\right) \end{pmatrix},$$
$$\hat{b}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + i\left(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|\right) & 0 \\ 0 & |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + i\left(|0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|\right) \end{pmatrix}.$$

Mit den Klammerausdrücken

$$\hat{b}+\hat{b}'=\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0| & 0\\ 0 & |0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|\end{pmatrix}=\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sigma_x & 0\\ 0 & \sigma_x\end{pmatrix},$$

$$\hat{b}-\hat{b}'=\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i\left(|0\rangle\langle 1|-|1\rangle\langle 0|\right) & 0\\ 0 & -i\left(|0\rangle\langle 1|-|1\rangle\langle 0|\right)\end{pmatrix}=\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sigma_y & 0\\ 0 & \sigma_y\end{pmatrix}$$

lautet der Bell-Operator in Dirac-Schreibweise

$$\begin{aligned}\hat{B}=&\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0| & 0\\ 0 & |0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|\end{pmatrix}_a\otimes\begin{pmatrix}|0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0| & 0\\ 0 & |0\rangle\langle 1|+|1\rangle\langle 0|\end{pmatrix}_b\\ &+\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-i\left(|0\rangle\langle 1|-|1\rangle\langle 0|\right) & 0\\ 0 & -i\left(|0\rangle\langle 1|-|1\rangle\langle 0|\right)\end{pmatrix}_a\otimes\begin{pmatrix}-i\left(|0\rangle\langle 1|-|1\rangle\langle 0|\right) & 0\\ 0 & -i\left(|0\rangle\langle 1|-|1\rangle\langle 0|\right)\end{pmatrix}_b\end{aligned}$$

und bei Verwendung der Paulischen Spinmatrizen

$$\begin{aligned}\hat{B}&=\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sigma_x & 0\\ 0 & \sigma_x\end{pmatrix}_a\otimes\begin{pmatrix}\sigma_x & 0\\ 0 & \sigma_x\end{pmatrix}_b+\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sigma_y & 0\\ 0 & \sigma_y\end{pmatrix}_a\otimes\begin{pmatrix}\sigma_y & 0\\ 0 & \sigma_y\end{pmatrix}_b\\ &=\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sigma_x\otimes\sigma_x & 0\\ 0 & \sigma_x\otimes\sigma_x\end{pmatrix}_{ab}+\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\sigma_y\otimes\sigma_y & 0\\ 0 & \sigma_y\otimes\sigma_y\end{pmatrix}_{ab}\\ &=\sqrt{2}\begin{pmatrix}\sigma_x\otimes\sigma_x+\sigma_y\otimes\sigma_y & 0\\ 0 & \sigma_x\otimes\sigma_x+\sigma_y\otimes\sigma_y\end{pmatrix}_{ab}.\end{aligned}$$

In Übereinstimmung mit der Literatur schreiben wir abgekürzt

$$\begin{aligned}\hat{B}&=\sqrt{2}\operatorname{diag}\left(\sigma_x,\sigma_x\right)_a\otimes\operatorname{diag}\left(\sigma_x,\sigma_x\right)_b+\sqrt{2}\operatorname{diag}\left(\sigma_y,\sigma_y\right)_a\otimes\operatorname{diag}\left(\sigma_y,\sigma_y\right)_b\\ &=\sqrt{2}\operatorname{diag}\left(\sigma_x\otimes\sigma_x+\sigma_y\otimes\sigma_y,\sigma_x\otimes\sigma_x+\sigma_y\otimes\sigma_y\right)_{ab},\end{aligned}$$

wobei die Eigenvektoren des Bell-Operators gegeben sind durch

$$\left|\Phi^{\pm}\right\rangle_{ab}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_a\otimes|0\rangle_b\pm|1\rangle_a\otimes|1\rangle_b\right),$$

$$\left|\Psi^{\pm}\right\rangle_{ab}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_a\otimes|1\rangle_b\pm|1\rangle_a\otimes|0\rangle_b\right).$$

Die beiden Eigenwerte von $\left|\Phi^{\pm}\right\rangle_{ab}$ sind null und die von $\left|\Psi^{\pm}\right\rangle_{ab}$ gleich $\pm 2\sqrt{2}$.

Bei einer Verschränkung sind zwei Photonen *A* und *B*, die ehemals als Paar *AB* auftraten, auch nach ihrer räumlichen Trennung miteinander verbunden. In Dirac-Schreibweise folgt mit den Definitionen

$$\begin{aligned}
|00\rangle &\equiv |0\rangle_A \otimes |0\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Phi^+\rangle_{AB} + |\Phi^-\rangle_{AB}\right),\\
|11\rangle &\equiv |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Phi^+\rangle_{AB} - |\Phi^-\rangle_{AB}\right),\\
|01\rangle &\equiv |0\rangle_A \otimes |1\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Psi^+\rangle_{AB} + |\Psi^-\rangle_{AB}\right),\\
|10\rangle &\equiv |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\Psi^+\rangle_{AB} - |\Psi^-\rangle_{AB}\right)
\end{aligned}$$

einer von vier möglichen Endzuständen eines verschränkten Paares, und zwar

$$\begin{aligned}
|\Phi^\pm\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle \pm |11\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A |0\rangle_B \pm |1\rangle_A |1\rangle_B\right),\\
|\Psi^\pm\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|01\rangle \pm |10\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A |1\rangle_B \pm |1\rangle_A |0\rangle_B\right).
\end{aligned}$$

Sämtliche Korrelationen werden bereits beim Urknall festgelegt, daher ist alles vorherbestimmt. Das Universum hat die Freiheit der Wahl von Anfang an eingeschränkt.

Man kann die Bell-Zustände auch durch die Pauli-Matrizen und den Einheitsoperator ausdrücken:

$$\begin{aligned}
|\Phi^\pm\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A, |1\rangle_A\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |0\rangle_B \\ |1\rangle_B \end{pmatrix},\\
|\Psi^\pm\rangle_{AB} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A, |1\rangle_A\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \pm 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} |0\rangle_B \\ |1\rangle_B \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$|\Psi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B - |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B\right)$$

der Singulett-Zustand zum Gesamtspin $S = 0$ und

$$|\Psi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_A \otimes |1\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |0\rangle_B\right)$$

der mittlere Triplett-Zustand zum Gesamtspin $S = 1$. Die beiden anderen Zustände sind zwei orthogonale Überlagerungen der Triplett-Zustände $M = \pm 1$.

Eine Quantenverschränkung entsteht wie gesagt, wenn Quantenobjekte als gemeinsames Paar erzeugt werden. Wird eines dieser Quanten gemessen, ändert sich sein Zustand von unscharf zu scharf, und das mit ihm verschränkte Teilchen nimmt ohne Zeitverzögerung, bis auf das Vorzeichen, ebenfalls den scharfen Zustand an.

Ein Qubit oder Quantenbit ist ein solches beliebig manipulierbares Zweizustands-Quantensystem, also ein System, das nur durch die Quantenmechanik korrekt beschrieben werden kann, und das zwei durch Messung sicher unterscheidbare Zustände enthält, nämlich

$$\left|\psi\right\rangle_A = \alpha\left|0\right\rangle_A + \beta\left|1\right\rangle_A \quad \text{und} \quad \left|\psi\right\rangle_B = \alpha\left|0\right\rangle_B + \beta\left|1\right\rangle_B ,$$

wobei α und β komplexe Zahlen sind, die auf $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ normiert werden können.

Sender und Empfänger besitzen auf einer Fläche der Gleichzeitigkeit je ein Qubit eines verschränkten EPR-Paares[10] in einem Bell-Zustand, womit die Messungen entsprechender Observablen korreliert sind. Der Sender steht dabei für das Teilchen des Zustands mit dem Index *A*, der Empfänger für das Teilchen mit Index *B*. Auf der Seite des Senders wird nun eine Bell-Messung, d.h. eine gleichzeitige Messung am verschränkten Qubit $\left|\Psi^-\right\rangle_{AB}$ des Senders[11] und am zu teleportierenden Qubit

$$\left|\psi\right\rangle_C = \alpha\left|0\right\rangle_C + \beta\left|1\right\rangle_C$$

durchgeführt. Diesem zu teleportierenden Qubit haben wir (lediglich zur Unterscheidung der Teilchen) den Index *C* zugeordnet. Das Gesamtsystem der drei Qubits ist dann im Zustand

$$\begin{aligned}
\left|\Psi^-\right\rangle_{AB} \otimes \left|\psi\right\rangle_C &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\left|0\right\rangle_A\left|1\right\rangle_B - \left|1\right\rangle_A\left|0\right\rangle_B\Big) \otimes \Big(\alpha\left|0\right\rangle_C + \beta\left|1\right\rangle_C\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\left|0\right\rangle_A \otimes \left|0\right\rangle_C \alpha\left|1\right\rangle_B\Big) - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\left|1\right\rangle_A \otimes \left|0\right\rangle_C \alpha\left|0\right\rangle_B\Big) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\left|0\right\rangle_A \otimes \left|1\right\rangle_C \beta\left|1\right\rangle_B\Big) - \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\left|1\right\rangle_A \otimes \left|1\right\rangle_C \beta\left|0\right\rangle_B\Big).
\end{aligned}$$

In nächsten Schritt ersetzen wir die Bellzustände durch die Eigenvektoren,

$$\begin{aligned}
\left|\Psi^-\right\rangle_{AB} \otimes \left|\psi\right\rangle_C &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\left|\Phi^+\right\rangle_{AC} + \left|\Phi^-\right\rangle_{AC}\Big)\alpha\left|1\right\rangle_B\right) \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\left|\Psi^+\right\rangle_{AC} - \left|\Psi^-\right\rangle_{AC}\Big)\alpha\left|0\right\rangle_B\right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\left|\Psi^+\right\rangle_{AC} + \left|\Psi^-\right\rangle_{AC}\Big)\beta\left|1\right\rangle_B\right) \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\left|\Phi^+\right\rangle_{AC} - \left|\Phi^-\right\rangle_{AC}\Big)\beta\left|0\right\rangle_B\right),
\end{aligned}$$

und fassen gleichartige Terme in einer Form zusammen, in der die vier Bell-Zustände der beim Sender gebliebenen Qubits *A* und *C*, jeweils verschränkt mit einem Zustand des Qubits *B*, im Empfänger auftauchen:

[10] In Anlehnung an das Einstein-Podosky-Rosen-Paradoxon
[11] Wir wählen hier beispielhaft den Singulettzustand.

$$\left|\Psi^-\right\rangle_{AB}\otimes\left|\psi\right\rangle_C=\frac{1}{2}\Big[\left|\Phi^+\right\rangle_{AC}\left(-\beta\left|0\right\rangle_B+\alpha\left|1\right\rangle_B\right)+\left|\Phi^-\right\rangle_{AC}\left(\beta\left|0\right\rangle_B+\alpha\left|1\right\rangle_B\right)$$
$$+\left|\Psi^+\right\rangle_{AC}\left(-\alpha\left|0\right\rangle_B+\beta\left|1\right\rangle_B\right)+\left|\Psi^-\right\rangle_{AC}\left(\alpha\left|0\right\rangle_B+\beta\left|1\right\rangle_B\right)\Big].$$

Das Ergebnis wird dem Empfänger in Form einer konventionellen 2-Bit-Information mitgeteilt. Durch die Messung wird die Gesamtwellenfunktion beim sogenannten Kollaps der Wellenfunktion auf denjenigen Summanden der vorstehenden Formel reduziert, die den festgestellten Bell-Zustand von *A* und *C* enthält.

Analog zu dem oben hergeleiteten Singulett-Zustand ergeben sich auch alle anderen Kombinationen, so daß wir zusammenfassend schreiben können:

$$\left|\Phi^\pm\right\rangle_{AB}\otimes\left|\psi\right\rangle_C=\frac{1}{2}\Big[\left|\Phi^+\right\rangle_{AC}\left(\alpha\left|0\right\rangle_B\pm\beta\left|1\right\rangle_B\right)+\left|\Phi^-\right\rangle_{AC}\left(\alpha\left|0\right\rangle_B\mp\beta\left|1\right\rangle_B\right)$$
$$+\left|\Psi^+\right\rangle_{AC}\left(\beta\left|0\right\rangle_B\pm\alpha\left|1\right\rangle_B\right)+\left|\Psi^-\right\rangle_{AC}\left(\beta\left|0\right\rangle_B\mp\alpha\left|1\right\rangle_B\right)\Big],$$
$$\left|\Psi^\pm\right\rangle_{AB}\otimes\left|\psi\right\rangle_C=\frac{1}{2}\Big[\left|\Phi^+\right\rangle_{AC}\left(\pm\beta\left|0\right\rangle_B+\alpha\left|1\right\rangle_B\right)+\left|\Phi^-\right\rangle_{AC}\left(\mp\beta\left|0\right\rangle_B+\alpha\left|1\right\rangle_B\right)$$
$$+\left|\Psi^+\right\rangle_{AC}\left(\pm\alpha\left|0\right\rangle_B+\beta\left|1\right\rangle_B\right)+\left|\Psi^-\right\rangle_{AC}\left(\mp\alpha\left|0\right\rangle_B+\beta\left|1\right\rangle_B\right)\Big].$$

Es ist eine der großen Tragödien der Physik, daß Albert Einstein, der normalerweise als Kapazität in vielen Disziplinen gilt, die Quantenmechanik nicht verstanden hat (oder nicht verstehen wollte), aber in einem hat er, vielleicht ohne es zu wollen, vollends recht behalten: „Gott würfelt nicht."

