Aufgabe: Zeigen Sie, daß das Weltall ein Räuber-Beute-System ist und erklären Sie damit die Ausdehnung des Universums.

Beweis: Man kann zeigen, daß jede Konstante, die sich paarweise als Produkt zweier zeitabhängiger Größen darstellen läßt, ein Räuber-Beute-System beschreibt. Diese Konstante sei in unserem Fall die Energie, die nach dem Energieerhaltungssatz konstant bleiben muß. Wir schreiben also die gesamte Energie E des als endlich angenommenen Universums als Produkt aus zwei Größen, die beide zeitabhängig sind, dem Raum V und dem Gravitationsdruck p:

$$E = pV.$$

Der Raum V werde dabei von der gewöhnlichen Materie aufgespannt, die aus Protonen, Neutronen und Elektronen besteht. Da sich das Weltall ausdehnt, ist $V = V(t)$ zeitabhängig. Bei dieser Ausdehnung muß sich natürlich auch der Gravitationsdruck der im Raum enthaltenen Materie zeitlich ändern, d.h. $p = p(t)$, sonst wäre der Energieerhaltungssatz verletzt. Leiten wir die obige Gleichung zeitlich ab, erhalten wir den Ausdruck

$$p\dot{V} + V\dot{p} = 0.$$

Nun postulieren wir einen von der Dunklen Energie $\hat{E}$ aufgespannten Raum $\hat{V}$, für den der gleiche Erhaltungssatz gilt und in dem ein zum Gravitationsdruck analoger Druck $\hat{p}$ herrschen muß:

$$\hat{E} = \hat{p}\hat{V}.$$

Die Größe $\hat{E}$ hat den Charakter einer Entropie, da Materie ständig in Schwarzen Löchern verschwindet und zur Freien Energie nichts mehr beiträgt. Sie muß daher zum Zeitpunkt des Urknalls, als es noch keine Schwarzen Löcher gab, Null gewesen sein. Seither nimmt sie zu, während die gewöhnliche Energie E aufgrund des Materieverlustes scheinbar abnimmt, durch die Dunkle Energie jedoch vollständig kompensiert wird. Nachdem es nicht sein kann, daß das Weltall sich unendlich ausdehnt, weil dann der Gravitationsdruck gegen Null gehen müßte und dies eine Verletzung des Energieerhaltungssatzes darstellt, muß die Bilanzgleichung $E = \hat{E}$, d.h.

$$pV = \hat{p}\hat{V},$$

zu jedem Zeitpunkt erfüllt sein, woraus wir durch Differentiation die sogenannte Weltformel erhalten:

$$p\frac{dV}{dt} + V\frac{dp}{dt} = \hat{p}\frac{d\hat{V}}{dt} + \hat{V}\frac{d\hat{p}}{dt},$$

die eine vollständige thermodynamische Beschreibung des Alls liefert. Es handelt sich hierbei um die klassische Formulierung eines Räuber-Beute-Systems. Materie einschließlich der Dunklen Materie geht also aus Erhaltungsgründen nicht verloren, sondern findet sich im Paralleluniversum wieder. Ob dabei aus Symmetriegründen eine Umwandlung in Antimaterie stattfindet, womit sich auch die Ladung neutralisieren würde, muß zunächst dahingestellt bleiben. Derjenige Raum jedenfalls, der sich gegenwärtig ausdehnt, sei definitionsgemäß der „Räuber“, und das ist in unserem Fall der von der gewöhnlichen und der Dunklen Materie aufgespannte reale Raum V. Damit verbleibt dem von der Dunklen Energie aufgespannten Raum $\hat{V}$ nur die Rolle der „Beute“, die vom realen Raum buchstäblich „aufgefressen“ wird, d.h. einen Gravitationskollaps erleidet, der in eine Singularität mündet.

Die Ausdehnung des Raumes sei proportional zur bereits erreichten Größe des Raumes, was im Einklang damit steht, daß Galaxien sich um so schneller von uns wegbewegen, je entfernter sie sind. Es gehört nun zu den typischen Eigenschaften eines Räuber-Beute-Systems, daß wenn der reale Raum sich ausdehnt, sich gleichzeitig der von der Dunklen Energie aufgespannte Raum zusammenziehen muß. In jedem Fall können wir Expansion und Kontraktion der beiden Räume durch zwei Exponentialfunktionen der Gestalt

$$\frac{dV}{dt} = \alpha V \quad \text{und} \quad \frac{d\hat{V}}{dt} = -\beta\hat{V}$$

beschreiben, wobei α und β jeweils größer Null sind. Wir lösen nun die Weltformel einmal nach der Ableitung der Beute- und zum andern nach der Ableitung der Räuberpopulation auf und setzen dabei sogleich die beiden obigen Exponentialfunktionen ein:

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{V}}{dt} &= \frac{p}{\hat{p}}\alpha V + \frac{1}{\hat{p}}\frac{dp}{dt}V - \frac{1}{\hat{p}}\frac{d\hat{p}}{dt}\hat{V}, \\
\frac{dV}{dt} &= -\frac{\hat{p}}{p}\beta\hat{V} + \frac{1}{p}\frac{d\hat{p}}{dt}\hat{V} - \frac{1}{p}\frac{dp}{dt}V.
\end{aligned}$$

Nach entsprechender Umformung und Variablensubstitution erhalten wir

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{V}}{dt} &= \left(\alpha + \frac{\dot{p}}{p}\right)\hat{V} - \frac{\dot{\hat{p}}}{\hat{p}V}V\hat{V}, \\
\frac{dV}{dt} &= \left(-\beta + \frac{\dot{\hat{p}}}{\hat{p}}\right)V - \frac{\dot{p}}{p\hat{V}}V\hat{V}.
\end{aligned}$$

Lösen wir dieses System wie folgt auf:

$$\begin{aligned}
\hat{p}\dot{\hat{V}} + \dot{\hat{p}}\hat{V} &= \left(\alpha + \frac{\dot{p}}{p}\right)\hat{p}\hat{V}, \\
p\dot{V} + \dot{p}V &= \left(-\beta + \frac{\dot{\hat{p}}}{\hat{p}}\right)pV,
\end{aligned}$$

und setzen die beiden Ausdrücke gleich, ergibt sich mittels des Energieerhaltungssatzes die Identität

$$\alpha + \beta = \frac{\dot{\hat{p}}}{\hat{p}} - \frac{\dot{p}}{p} > 0,$$

wobei $\dot{p} < 0$ und $\dot{\hat{p}} > 0$ ist. Das obige Differentialgleichungssystem formen wir nun weiter um zu

$$\frac{d\hat{V}}{dt} = \alpha\hat{V} - \left(\frac{\dot{\hat{p}}}{\hat{p}} - \frac{\dot{p}}{p}\right)\frac{1}{V}V\hat{V},$$
$$\frac{dV}{dt} = -\beta V + \left(\frac{\dot{\hat{p}}}{\hat{p}} - \frac{\dot{p}}{p}\right)\frac{1}{\hat{V}}V\hat{V}$$

im Einklang mit obigen Definitionen. Entsprechend den Festsetzungen

$$\hat{\varepsilon} \equiv \alpha > 0, \quad \hat{\gamma} \equiv \frac{\alpha + \beta}{V} > 0$$

und

$$\varepsilon \equiv \beta > 0, \quad \gamma \equiv \frac{\alpha + \beta}{\hat{V}} > 0$$

erhalten wir so die charakteristischen Lotka-Volterra-Gleichungen eines klassischen Räuber-Beute-Systems:

$$\dot{\hat{V}} = \hat{\varepsilon}\hat{V} - \hat{\gamma}V\hat{V},$$
$$\dot{V} = -\varepsilon V + \gamma V\hat{V}.$$

Darin sind V der gewöhnliche von der Materie aufgespannte Raum, $\hat{V}$ der von der Dunklen Energie aufgespannte Raum, $\hat{\varepsilon}$ die Expansionsrate des von der Dunklen Energie aufgespannten Raumes ohne störende Wechselwirkung mit Materie und $\hat{\gamma}$ die Kontraktionsrate des auf den gewöhnlichen Raum normierten, von der Dunklen Energie aufgespannten Raumes. Die Größe ε ist die Kontraktionsrate des Raumes unter der Annahme, daß kein von der Dunklen Energie aufgespannter Raum vorhanden ist, und γ die auf den von der Dunklen Energie erzeugten Raum normierte Expansionsrate des gewöhnlichen Raumes.

Das oszillierende Weltall gehorcht also denselben Regeln, wie sie von den Lösungen eines Räuber-Beute-Systems beschrieben werden. Es kennt keinen Anfang und kein Ende, nur ein Minimum und Maximum seiner Ausdehnung zwischen Singularität und Unendlichkeit. Gegenwärtig „frißt“ der von der Gravitationskraft der Materie und Dunklen Materie aufgespannte Raum den von der Dunklen Energie aufgespannten, bis dieser nahezu vollständig oder ganz verschlungen ist und die Verhältnisse sich umkehren. Begleitend zur gegenwärtigen Expansion des Alls nimmt die Entropie dabei zu, folglich müßte sie nach Erreichen des Umkehrpunktes wieder abnehmen, wie wir das in Aufgabe 13 gezeigt haben. Es ist ein ewiger Kreislauf, da die Materiebausteine eine unendliche Lebensdauer haben, also nicht vergänglich sind. Vor allem aber braucht dieses System keine kausalen Ursachen zu seiner Erzeugung, da es aus sich selbst hervorgeht; es ist sozusagen schöpfungsfrei, steht im Einklang mit den Beobachtungen, und Energie-, Impuls- und Drehimpulserhaltungssatz sind zu keiner Zeit verletzt.