

Physikaufgabe 135

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

Aufgabe: Leiten Sie die Zerfallszeit eines Schwarzen Lochs her.

Lösung: Die Hawking-Temperatur ist gegeben durch

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi GMk}$$

Das kann man umformen in

$$\frac{kT}{\hbar c} = \frac{c^2}{8\pi GM} = \frac{1}{4\pi R_s}$$

Das Wiensche Verschiebungsgesetz ergibt ein Maximum der Schwarzkörperstrahlung bei Wellenlängen

$$\lambda \approx \frac{\hbar c}{kT} = \frac{4\pi R_s^2}{R_s} = \frac{A_s}{R_s}$$

Damit ergibt sich der korrekte Schwarzschildradius zu

$$R_s = \frac{1}{4\pi} \frac{\hbar c}{kT} = \frac{1}{4\pi} \frac{8\pi GM}{c^2} = \frac{2GM}{c^2}$$

Nach dem Stefan-Boltzmann-Gesetz gilt mit der Stefan-Boltzmann-Konstanten

$$\sigma_B = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2}$$

zwischen Leistung P und der Temperatur T die bekannte Abhängigkeit

$$P = \sigma_B A_s T^4 = c \frac{2\pi^5 k^4 T^4}{15h^3 c^3} 4\pi R_s^2 = c \frac{\pi^3 (kT)^4}{15 (\hbar c)^3} R_s^2 = \frac{\pi^3 (kT)^4}{15 (\hbar c)^4} \hbar c^2 R_s^2,$$

wobei $A_s = 4\pi R_s^2$ die Oberfläche der Singularität auf dem Ereignishorizont ist. Setzen wir die Hawking-Temperatur ein,

$$kT = \frac{\hbar c}{4\pi R_s},$$

so erhalten wir für die Leistung den Ausdruck

$$P = \frac{\pi^3}{15} \frac{\hbar c^2}{(4\pi)^4 R_s^8} R_s^6 = \frac{3\pi}{5} \frac{1}{4^2} \frac{\hbar c^2}{(4\pi R_s^2)^4} \left(\frac{4\pi}{3} R_s^3\right)^2 = \frac{3\pi}{5} \frac{\hbar c^2}{A_s^4} \left(\frac{V_s}{4}\right)^2.$$

Die Zerfallszeit τ des Schwarzen Lochs ergibt sich schließlich aus der Energiegleichung:

Physikaufgabe 135

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{Mc^2}{P} = \frac{80 A_S^4 M}{3\pi \hbar V_S^2} = \frac{80 A_S^4 \rho}{3\pi \hbar V_S} = \frac{80 A_S^4 \sigma}{\pi \hbar V_S R_S} \\ &= \frac{80}{\pi} \frac{3A_S^4 \sigma}{4\pi \hbar R_S^4} = \frac{60}{\pi^2} \frac{\sigma A_S^4}{\hbar R_S^4} = \frac{60}{\pi^2} \frac{\sigma}{\hbar} \lambda^4 \approx 6 \frac{\sigma}{\hbar} \lambda^4.\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Relation zwischen Massendichte ρ und Oberflächendichte σ benutzt. Man beachte, daß die Längeneinheit eines Schwarzen Lochs $\lambda = 4\pi R_S$ ist, und nicht $\lambda = R_S$. Der Schwarzschildradius ist die Längeneinheit pro Raumwinkel

$$R_S = \frac{\lambda}{4\pi},$$

weil die Masse einer Singularität gleichmäßig auf der Oberfläche verteilt ist. Die Ableitung auf Wikipedia (siehe [1]) ist daher falsch.

Literatur

- [1] <https://de.wikipedia.org/wiki/Hawking-Strahlung> in der Fassung vom 14.01.2021.