Aufgabe: Beweisen Sie, daß es keinen unvorhersehbaren Zufall gibt, und daß die Welt demnach deterministisch ist.

Beweis: Noch für Laplace war die Welt durch Anfangsbedingungen und Bewegungsgesetze vollständig determiniert. Eine Intelligenz, die zu einem beliebigen Zeitpunkt alle Kräfte kennt, die es in der Welt gibt, wäre allein anhand von ein und derselben Formel in der Lage, sowohl die Bewegungen der größten Himmelskörper als auch die des leichtesten Atoms nachzuvollziehen und vorauszuberechnen. Sie könnte also sowohl in die Zukunft als auch in die Vergangenheit schauen. Ein solcher Laplacescher Dämon[1] unterstützt demnach die Vorstellung, wonach es mit Hilfe eines geschlossenen mathematischen Weltgleichungssystems möglich sein soll, unter Kenntnis sämtlicher Naturgesetze und Anfangsbedingungen wie räumliche Lage, Position und Geschwindigkeit aller im Kosmos vorhandenen Teilchen[2] jeden vergangenen und zukünftigen Ort und Zustand zu bestimmen und vorherzusagen. Den Vorstellungen des Determinismus und damit dem Laplaceschen Dämon läuft allein die Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik zuwider, welche im Atom einen unvorhersehbaren Zufall für Ort und Impuls annimmt. Jedoch führt bereits Würfeln nur deswegen zu einem nicht vorhersehbaren Ergebnis, weil wir die Anfangsbedingungen, die das Ereignis bestimmen, nicht genau kennen. Würden wir sie hingegen kennen, wäre der Zufall sofort ausgeschlossen und durch eine strenge Gesetzmäßigkeit ersetzt. Sobald wir aber eine Messung durchführen, können wir die Meßgröße nur so genau ermitteln, wie wir gemessen haben, und eine unendliche Meßgenauigkeit scheitert bereits am Meßverfahren. Wir müssen andererseits aber gar nicht genau genug messen, denn die Meßgenauigkeit hat eine natürliche Untergrenze, nämlich das Plancksche Wirkungsquantum.

Angenommen, die Welt wäre nicht deterministisch. Würde also ein Teilchen am Ort **r** mit Impuls **p** nicht umlaufen, könnte es keinen Drehimpuls **L** haben. Nun ist aber

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = mr\mathbf{e}_r \times \left(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\varphi}\mathbf{e}_\varphi\right) = mr\dot{r}\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r + mr^2\dot{\varphi}\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\varphi = mrv_\varphi \mathbf{e}_z$$

der Drehimpuls eines Elektrons der Masse *m* in einem Polarkoordinatensystem mit den Achsen (r, φ, z). Das eindimensionale Drehmoment des Elektrons ist dann gegeben durch

$$\dot{L} = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mr^2\ddot{\varphi} = 2m\dot{r}v_\varphi + mrr\ddot{\varphi} = m\dot{r}v_\varphi + mr\dot{v}_\varphi ,$$

was äquivalent ist zu

$$\Delta L = mv_\varphi \Delta r + mr\Delta v_\varphi .$$

Quadrieren wir diese Gleichung,

$$\Delta L^2 = m^2 v_\varphi^2 \Delta r^2 + 2rmv_\varphi \Delta r \cdot m\Delta v_\varphi + r^2 m^2 \Delta v_\varphi^2$$

[1] Der Name Dämon kam erst später auf.
[2] Insbesondere ist dafür die Teilchennatur der Wellen heranzuziehen.

bzw.

$$\Delta L^2 = p_\varphi^2 \Delta r^2 + 2 r p_\varphi \Delta r \cdot \Delta p_\varphi + r^2 \Delta p_\varphi^2,$$

so ergibt sich nach Umformung die Unschärferelation

$$\Delta r \cdot \Delta p_\varphi = \frac{\Delta L^2 - p_\varphi^2 \Delta r^2 - r^2 \Delta p_\varphi^2}{2 r p_\varphi} = -\frac{p_\varphi^2 \Delta r^2 + r^2 \Delta p_\varphi^2}{2L}.$$

Dieser Ausdruck ist immer noch von zwei Variablen abhängig und besagt, daß diese nicht voneinander unabhängig gemessen werden können, solange sie nicht voneinander separiert worden sind. Unschärfe ist allerdings nichts anderes als die Konstanz der Flächengeschwindigkeit und hat nichts mit Statistik zu tun. Das Elektron überstreicht auf seiner Umlaufbahn das differentielle Flächenelement

$$d\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times d\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}})\, dt = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \mathbf{v})\, dt = \frac{1}{2m}(\mathbf{r} \times \mathbf{p})\, dt = \frac{1}{2m}\mathbf{L}\, dt.$$

Damit hängt der Drehimpuls direkt von der Flächengeschwindigkeit ab, die wie der Drehimpuls selbst konstant sein muß:

$$\mathbf{L} = 2m \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}.$$

Differenzieren wir die Flächengeschwindigkeit

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{1}{2}(\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2m}\mathbf{L}$$

ein zweites Mal, ergibt sich

$$\frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}}) = \frac{\dot{\mathbf{L}}}{2m},$$

und wir erhalten

$$2m \frac{d^2\mathbf{A}}{dt^2} = \left(\dot{r} p_\varphi + r \dot{p}_\varphi\right)\mathbf{e}_r = \frac{d\mathbf{L}}{dt}.$$

Da der Drehimpuls

$$L = 2m \frac{dA}{dt} = r p_\varphi$$

erhalten bleibt, ist

$$2m \frac{d^2 A}{dt^2} = \dot{r} p_\varphi + r \dot{p}_\varphi = 0$$

und die Flächengeschwindigkeit dA/dt selbst eine Erhaltungsgröße, aus der folgt:

$$p_\varphi^2 \Delta r^2 = r^2 \Delta p_\varphi^2.$$

Damit lautet die Unschärferelation

$$\Delta r \cdot \Delta p_\varphi = \frac{\Delta L^2 - p_\varphi^2 \Delta r^2 - r^2 \Delta p_\varphi^2}{2 r p_\varphi} = -\frac{p_\varphi^2 \Delta r^2}{r p_\varphi} = -\frac{r^2 \Delta p_\varphi^2}{r p_\varphi}.$$

Im ersten Fall hängt sie nur vom Ort ab,

$$\Delta r \cdot \Delta p_\varphi = -\frac{p_\varphi \Delta r^2}{r} = -\frac{r p_\varphi \Delta r^2}{r^2} = -L\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2,$$

im zweiten Fall nur vom Impuls,

$$\Delta r \cdot \Delta p_\varphi = -\frac{r^2 \Delta p_\varphi^2}{r p_\varphi} = -\frac{r \Delta p_\varphi^2}{p_\varphi} = -\frac{r p_\varphi \Delta p_\varphi^2}{p_\varphi^2} = -L\left(\frac{\Delta p_\varphi}{p_\varphi}\right)^2.$$

Orts- und Impulsunschärfe sind also direkt proportional zueinander,

$$\Delta p_\varphi = -\frac{L}{r^2}\Delta r \quad \text{und} \quad \Delta r = -\frac{L}{p_\varphi^2}\Delta p_\varphi$$

bzw.

$$\frac{\Delta r}{r} = -\frac{\Delta p_\varphi}{p_\varphi},$$

d.h. die relative Ortsunschärfe ist entgegengesetzt gleich der relativen Impulsunschärfe. Damit ist uns eine Separation der Variablen geglückt, die beweist, daß Ort und Impuls eines Teilchens gleichzeitig scharf gemessen werden können, denn messen wir etwa den Ort beliebig scharf, ist $\Delta r = 0$ und damit

$$\Delta r \cdot \Delta p_\varphi = -L\left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2 = 0,$$

messen wir hingegen den Impuls beliebig scharf, ist $\Delta p_\varphi = 0$ und daher ebenso

$$\Delta r \cdot \Delta p_\varphi = -L\left(\frac{\Delta p_\varphi}{p_\varphi}\right)^2 = 0.$$

Wenn allerdings das Elektron keiner Kreisbahn folgt, sondern einer Ellipsenbahn, können weder Ort noch Impuls scharf gemessen werden, weil die Wirkung wegen $\Delta r \neq 0$ und $\Delta p_\varphi \neq 0$

erhalten bleibt, $\Delta r \cdot \Delta p_\varphi \neq 0.$ Das ist aber eine andere Aussage als die, wonach entweder Ort oder Impuls scharf gemessen werden können, nur nicht beide gleichzeitig.

Ergänzen wir in obiger Unschärferelation noch Zähler und Nenner mit der jeweils anderen Variablen, so folgt wegen

$$\Delta L = r\Delta p_\varphi \pm p_\varphi \Delta r = \begin{cases} 2r\Delta p_\varphi & \text{für} \quad r\Delta p_\varphi = p_\varphi \Delta r, \\ 0 & \text{für} \quad r\Delta p_\varphi = -p_\varphi \Delta r \end{cases}$$

die Unschärfe

$$\Delta r \cdot \Delta p_\varphi = -L\left(\frac{\Delta p_\varphi}{p_\varphi}\right)^2 = -L\left(\frac{r\Delta p_\varphi}{L}\right)^2 = -\frac{L}{4}\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2.$$

Analog ergibt sich

$$\Delta r \cdot \Delta p_\varphi = -L\left(\frac{p_\varphi \Delta r}{r p_\varphi}\right)^2 = -L\left(\frac{p_\varphi \Delta r}{L}\right)^2 = -\frac{L}{4}\left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2.$$

Eine Drehimpulsänderung ΔL kann nämlich nicht nur als solche verstanden werden, sondern bei gleicher Richtung der Vektoren auch als Wirkung. Das Minuszeichen in obiger Differenz liefert das klassische Ergebnis, aber auch das Pluszeichen stellt keine Verletzung des Drehimpulserhaltungssatzes dar, weil beide Komponenten in die gleiche Raumrichtung weisen. Vielmehr besagen sie, daß die Wirkung ebenfalls eine Erhaltungsgröße ist.

Bei Drehung um die *x*-Achse folgt quantenmechanisch mit $L = L_z = m_l \hbar = l\hbar$ und

$$\Delta L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$$

für den Übergang von $l = 0$ nach $l = 1$ die Unschärfe

$$\Delta r \cdot \Delta p_\varphi = -\frac{\hbar}{4}\left(\frac{\sqrt{2}\hbar}{\hbar}\right)^2 = -\frac{\hbar}{2},$$

und das in einer klassisch durchgeführten Rechnung. Das Minuszeichen soll uns dabei nicht weiter irritieren, denn durch die Konvention, Differenzen durch statistische Standabweichungen zu ersetzen, kann man das Minuszeichen ignorieren oder einfach das Betragsquadrat bilden.

Das Problem der Kopenhagener Deutung der Quantenmechanik besteht nun darin, daß sie den Begriff der Wirkung nicht kennt und eine völlig andere Physik postuliert, die im Widerspruch zur klassischen Mechanik steht, was nach dem Satz vom Widerspruch nicht sein kann. Also ist die Welt deterministisch,

qed

