

Physikaufgabe 159

[Home](#) | [Startseite](#) | [Impressum](#) | [Kontakt](#) | [Gästebuch](#)

Aufgabe: Bestimmen Sie die Zeitabhängigkeit des Hubble-Parameters mittels relativistischer Rechnung unter der Annahme, daß das Weltall eine Singularität ist.

Lösung: Wir wählen als Skalenfaktor den Weg s , den eine Galaxie seit dem Urknall zurückgelegt hat. Ferner legen wir eine beschleunigte Ausdehnung des Alls zugrunde.

Nach dem relativistischen Weg-Zeit-Gesetz mit konstanter Beschleunigung a gilt für die Geschwindigkeit

$$v(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}}$$

mit $v(0) = 0$. Durch Integration erhalten wir das Weg-Zeit-Gesetz

$$s(t) = s(0) + \int_0^t v(t) dt = s(0) + \int_0^t \frac{at dt}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right),$$

wobei wir $s(0) = 0$ setzen, da wir von einer Singularität ausgehen.

Unsere Betrachtung soll außerdem mit der Zeit t_0 , in der wir leben, beginnen, und zu dieser Zeit hat unsere Galaxis die Geschwindigkeit

$$v(t_0) = \frac{at_0}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t_0^2}{c^2}}} = \frac{v_0 \gamma_0}{\sqrt{1 + \frac{v_0^2 \gamma_0^2}{c^2}}} = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \frac{v_0^2}{c^2} \frac{1}{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = v_0$$

erreicht. Bis heute hat also jede Galaxie, die aus der Singularität hervorgegangen ist, den Weg

$$\begin{aligned} s(t_0) &= s(0) + \int_0^{t_0} v(t) dt = \int_0^{t_0} \frac{at dt}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t_0^2}{c^2}} - 1 \right) \\ &= \frac{c^2}{a} \left(\frac{at_0}{v_0 \gamma_0} \sqrt{1 + \frac{v_0^2 \gamma_0^2}{c^2}} - 1 \right) = \frac{c^2}{a} \left(\frac{at_0}{v_0} - 1 \right) = \frac{c^2}{a} (\gamma_0 - 1) = s_0 \end{aligned}$$

zurückgelegt¹ und wird sich auch weiterhin mit der Geschwindigkeit

$$v(t) = \frac{a(t - t_0) + v_0 \gamma_0}{\sqrt{1 + \frac{(a(t - t_0) + v_0 \gamma_0)^2}{c^2}}}$$

¹ Die Galaxien haben nur deswegen eine unterschiedliche Geschwindigkeit, weil sie unterschiedlich weit von uns entfernt sind.

Physikaufgabe 159

ausbreiten. In der Singularität muß

$$v(0) = \frac{-at_0 + v_0\gamma_0}{\sqrt{1 + \frac{(-at_0 + v_0\gamma_0)^2}{c^2}}} = 0$$

sein. Das kann aber nur dann zutreffen, wenn $at_0 = v_0\gamma_0$. Der weitere Weg wird daher dem Skalenfaktor

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt = s_0 + \int_{t_0}^t \frac{a(t-t_0) + v_0\gamma_0}{\sqrt{1 + \frac{(a(t-t_0) + v_0\gamma_0)^2}{c^2}}} dt \\ &= s_0 + \int_{t_0}^t \frac{at dt}{\sqrt{1 + \frac{(at + v_0\gamma_0 - at_0)^2}{c^2}}} + (v_0\gamma_0 - at_0) \int_{t_0}^t \frac{dt}{\sqrt{1 + \frac{(at + v_0\gamma_0 - at_0)^2}{c^2}}} \end{aligned}$$

genügen. Dieser Ausdruck vereinfacht sich wegen $v(0) = 0$ zu

$$\begin{aligned} s(t) &= s_0 + \int_{t_0}^t \frac{at dt}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}} = s_0 + \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - \sqrt{1 + \frac{a^2 t_0^2}{c^2}} \right) \\ &= \frac{c^2}{a} (\gamma_0 - 1) + \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - \gamma_0 \right) = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Damit ist

$$\dot{s}(t) = \frac{at}{\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}}$$

und der Hubble-Parameter besitzt die Darstellung

$$H = \frac{\dot{s}(t)}{s(t)} = \frac{a^2}{c^2} \frac{t}{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2} - \sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}}}.$$

Die gegenwärtige Hubble-Konstante berechnet sich daraus zu

$$H(t_0) = \frac{at_0}{\gamma_0} \frac{1}{\frac{c^2}{a}(\gamma_0 - 1)} = \frac{v_0}{s_0} = \frac{1}{t_0}$$

und ist umgekehrt proportional zum Weltalter t_0 . Für kleine Zeiten geht der Hubble-Parameter

Physikaufgabe 159

$$H = \frac{a^2}{c^2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2} - 1 - \frac{1}{2} \frac{a^2 t^2}{c^2}} = 2 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \rightarrow \infty$$

und für große Zeiten gilt

$$H = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{t^2 - \frac{ct}{a}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t - \frac{c}{a}} \rightarrow 0.$$

Die in Aufgabe [\[157\]](#) verwendete Friedmann-Gleichung lautet mit diesem Skalenfaktor

$$H^2 = \frac{c^2}{R_S^2} + \frac{a^2}{c^2 \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right)^2}$$

oder, wenn wir die Wurzel ziehen,

$$H(t) = \sqrt{\frac{c^2}{R_S^2} + \frac{a^2}{c^2} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 t^2}{c^2}} - 1 \right)^{-2}}.$$

Das ist sinnvoll, da sich in der Näherung für große Zeiten,

$$H^2 = \frac{c^2}{R_S^2} + \frac{1}{t^2},$$

der Grenzwert

$$H(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{c^2}{R_S^2} + \frac{1}{t^2}} = \frac{c}{R_S} \approx 0$$

ergibt, der Hubble-Parameter also nahezu verschwindet oder jedenfalls zeitunabhängig wird. Für kleine Zeiten wiederum nimmt die Friedmann-Gleichung folgende Gestalt an,

$$H^2 = \frac{c^2}{R_S^2} + \frac{4c^2}{a^2 t^4},$$

womit der Hubble-Parameter

$$H(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{c^2}{R_S^2} + \frac{4c^2}{a^2 t^4}} \approx \frac{2c}{a} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t^2} \rightarrow \infty$$

geht. Das All hat also, wenn es neu entstehen soll, das Kunststück zu vollbringen, den Hubble-Parameter von Null auf Unendlich zurückzusetzen. Nichts anderes geschieht beim Urknall, wenn die Schwarzschildradien der aufeinanderprallenden Randsingularitäten von Universum und Antiuniversum in Punktsingularitäten mit nahezu verschwindendem Schwarzschildradius umgewandelt werden und beide Universen sozusagen neuentstehen.

Physikaufgabe 159

Setzen wir in den Hubble-Parameter des auslaufenden Weltalls die Kraft ein und betrachten den Impuls als die Ableitung der Energie nach der Lichtgeschwindigkeit,² $\Delta E = 2Mc\Delta c$, so folgt daraus der Hubble-Parameter

$$H = \frac{2Mc}{Ft^2} = \frac{2p\Delta t}{\Delta pt^2} = \frac{\Delta E\Delta t}{\Delta c\Delta p} \frac{1}{t^2} = \frac{\Delta E\Delta t}{\Delta s\Delta p} \frac{1}{t} = \frac{1}{t},$$

wobei wir noch das totale Differential des Ortes $s = vt$ verwendet haben,

$$\Delta s = v\Delta t + t\Delta v = t\Delta c.$$

Das dürfen wir, weil die Zeit sich nicht mehr ändert, wenn die Geschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit erreicht. Zugleich haben wir von der Unschärferelation

$$\Delta E\Delta t = \Delta s\Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Gebrauch gemacht. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit wird damit nicht in Frage gestellt. Weil der Schwarzschildradius $s(T_s) = R_s$ zur Schwarzschildzeit T_s erreicht wird, gilt die Relation

$$R_s = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \frac{a^2 T_s^2}{c^2}} - 1 \right) \approx cT_s$$

Dadurch wird zum Ausdruck gebracht, daß die Schwarzschildzeit $T_s \gg t_0$ ist. Zur Schwarzschildzeit müßten dann auch sämtliche Protonen zerfallen sein, da sich sonst kein inflationäres Szenario daraus entwickeln kann. Die vorliegende Lösung hat nämlich gegenüber der oben in Aufgabe [157] erwähnten den Vorteil, daß der Hubble-Parameter für $t \rightarrow 0$ keinem endlichen Wert zustreben kann, sondern gegen Unendlich geht.

² Das dürfen wir tun, weil die Lichtgeschwindigkeit niemals erreicht werden kann und wir nur nach einer der Lichtgeschwindigkeit beliebig benachbarten Geschwindigkeit ableiten.