Aufgabe: Berechnen Sie anhand der Fluktuationen des Vakuums, daß sich der Raum nach dem Urknall mit Überlichtgeschwindigkeit ausdehnt.

Lösung: Ein quantenmechanisches System wie das absolute Vakuum befindet sich im Grundzustand eines harmonischen Oszillators, wenn seine Energie E proportional zu seiner Kreisfrequenz ω ist,

$$E = \frac{\hbar}{2}\omega \quad \text{bzw.} \quad \Delta E = \frac{\hbar}{2}\Delta\omega.$$

Hier ist das halbe reduzierte Plancksche Wirkungsquantum $\hbar$ die Proportionalitätskonstante. Für die Eigenzeit τ eines solchen Systems gilt die Heisenbergsche Unschärferelation in der Form

$$\Delta\tau\Delta E = \frac{\hbar}{2}\Delta\tau\Delta\omega = \frac{\hbar}{2} \quad \text{oder} \quad \Delta\tau\Delta\omega = 1,$$

d.h. es gilt

$$\Delta\tau = \frac{\hbar}{2\Delta E} = \frac{1}{\Delta\omega}.$$

Wir nehmen aus Erhaltungsgründen an, daß die maximalen Schwankungen $\Delta\tau$ und ΔE nicht über die jeweiligen Größen τ und E hinauswachsen können, d.h. $\Delta\tau = \tau$ und $\Delta E = E$. Dann gilt die aus der Relativitätstheorie bekannte Relation

$$E = \frac{\hbar}{2\tau} = \frac{\hbar}{2}\frac{1}{t_0\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Wir betrachten das Weltall in dieser Aufgabe als Singularität, welche die gesamte Masse des Weltalls in ihrem Massenmittelpunkt vereinigt, den wir willkürlich in den Erdmittelpunkt verlegen. Im wahren Mittelpunkt des Weltalls hingegen sitze ein Kosmonaut, der sich mit der Geschwindigkeit v von uns wegbewegt, da das Weltall sich bekanntlich ausdehnt. Ein im System S' außerhalb der irdischen Singularität befindlicher Beobachter[1] mißt daher für das Weltall eine um den Faktor γ größere Energie

$$E = \gamma E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

[1] z.B. auf der Erde

als ein Beobachter im Ruhesystem der Erde S mit der Ruheenergie des Alls E_0. Während für uns Erdenbürger die Ruhezeit t_0 verstreicht, vergeht für einen „Kosmonauten“ in der wahren Singularität die viel kürzere Eigenzeit

$$\tau = t_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Aus Jahren werden Monate, aus Monaten Wochen, aus Wochen Tage, aus Tagen Minuten, aus Minuten Sekunden, aus Sekunden Nanosekunden usw. Es muß klar sein, daß der Kosmonaut in der Singularität denkt, daß für ihn die Zeit im Vergleich zur Ruhezeit der Erde immer langsamer verstreicht, je kürzer sein Abstand zur Lichtgeschwindigkeit wird. Er wird ebenfalls denken, daß die träge Masse des Alls unendlich groß geworden sein muß, weil er praktisch zum Stillstand gekommen ist. Er erkennt es daran, daß sich der Zeiger seiner Uhr nicht mehr bewegt. Ein Kosmonaut, dem solches widerfährt, wäre zwar unsterblich geworden, weil er nicht mehr altert, aber seine Gedanken wären ebenfalls zum Stillstand gekommen, so daß er Veränderungen seiner Umgebung nicht mehr wahrnehmen könnte. Einen derart eingefrorenen Zustand kann man kaum mehr als Leben bezeichnen, denn Leben bedeutet Veränderung.[2] Umgekehrt sieht der Kosmonaut, wenn er die Veränderungen auf der Erde wie durch ein Fernrohr verfolgen könnte, daß die weitere Erdgeschichte an ihm vorbeirast. Er könnte also in die Zukunft schauen und würde das Schicksal der Menschheit mit eigenen Augen erleben. Er würde sehen, wie sich die Sonne schließlich zu einem roten Riesen aufbläht, der die Erde in sich verschlingt. Schließlich könnte er sehen, wie sich um ihn herum immer massereichere Schwarze Löcher bilden, die das Weltall immer weiter abkühlen, bis es schließlich seinen Wärmetod erleidet. Am Ende aber würde er wohl selbst in ein solches Schwarzes Loch hineingezogen werden, und was dann passiert, wissen wir leider nicht. Wir wissen nur, daß am Ende der Zeit alle Materie in Strahlung umgewandelt worden ist und die energiereiche Gammastrahlung einen neuen Urknall auslösen wird. Die Größe des Universums wird sich dabei nicht ändern, da der Radius des Ereignishorizonts nur von der Masse abhängt, die Masse aber trotz mannigfacher Energieumwandlungen in Entropie, genauer gesagt Anergie, konstant bleibt. Ein materiefreies All sprich Vakuum ist allerdings nicht leer, denn es enthält alle Energie in Form von Strahlung, Strahlung, die einmal ausgesandt wurde, ohne jemals wieder absorbiert zu werden. Diese Strahlung stellt die potentielle Energie dar, aus der ein neues Universum hervorgehen kann, wenn Materie neu entsteht. Möglich ist das aufgrund der Unschärferelationen, durch die Energie in Zeit und Impuls in Raum umgewandelt werden. Dem liegt das gleiche Prinzip zugrunde wie bei der Umwandlung von potentieller in kinetische Energie. Kinetische Energie ist nicht ohne Materie denkbar. Die Energieform kommt in den Unschärferelationen dadurch zum Ausdruck, daß eine Komponente raumzeitlicher, die andere impulsenergetischer Natur ist. Man kann also davon ausgehen, daß die Energie-Impuls-Relation und das Linienelement der Raumzeit die Umwandlung von Strahlung in Materie leisten können. Gesucht wird also ein Mechanismus, bei dem die als Strahlung vorliegende Randsingularität in eine aus Materie bestehende Punktsingularität umgewandelt

[2] Wenn der Zeiger der Uhr sich nicht mehr ändert, die Wahrnehmung der Änderung aber ähnlich verzögert erfolgt, steht zu vermuten, daß wir das selbst gar nicht bemerken würden.

wird. Wenn die Umwandlung mit Lichtgeschwindigkeit erfolgen soll, dann kann es keinen Urknall im klassischen Sinne geben, sondern dann geht die allmähliche Ausdehnung des Alls mit einem allmählichen Rückgang des Impulses einher. Folgen wir nämlich der exakten Definition der quantenmechanischen Unschärferelation ohne Mittelung über die Geschwindigkeiten, so ist

$$\Delta\tau\Delta E = \sqrt{\left\langle \tau^2 \right\rangle - \left\langle \tau \right\rangle^2}\sqrt{\left\langle E^2 \right\rangle - \left\langle E \right\rangle^2} = \sqrt{\left\langle t_0^2 \right\rangle - \left\langle t_0 \right\rangle^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{\sqrt{\left\langle E_0^2 \right\rangle - \left\langle E_0 \right\rangle^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \Delta t_0 \Delta E_0.$$

Wegen $\Delta t_0 = t_0$ und $\Delta E_0 = E_0$ folgt weiter

$$\Delta\tau\Delta E = t_0 E_0 = t_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \tau E = \frac{\hbar}{2}.$$

Ob sich das Vakuum mit Lichtgeschwindigkeit ausbreitet, ist zunächst noch eine offene Frage. Wir nehmen daher an, daß Eigenzeit und Energie des Vakuums einer relativistischen Abhängigkeit von der Ausbreitungsgeschwindigkeit v genügen. Dann berechnen sich das erste und zweite Moment der Eigenzeit gemäß der gewichteten Summe über alle Geschwindigkeiten. Wenn wir quadratische Terme und höher vernachlässigen, ist der Mittelwert der Eigenzeit in der Nähe der Lichtgeschwindigkeit gegeben durch

$$\begin{aligned}
\left\langle \tau \right\rangle &= \frac{1}{\int\limits_{c-\Delta v}^{c} dv}\int\limits_{c-\Delta v}^{c} \tau(v)\,dv = \frac{t_0}{\Delta v}\int\limits_{c-\Delta v}^{c}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,dv = \frac{ct_0}{\Delta v}\int\limits_{1-\frac{\Delta v}{c}}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\frac{ct_0}{\Delta v}\left[x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x\right]_{1-\frac{\Delta v}{c}}^{1} = \frac{1}{2}\frac{ct_0}{\Delta v}\left[-\left(1-\frac{\Delta v}{c}\right)\sqrt{2\frac{\Delta v}{c}}+\arcsin\sqrt{2\frac{\Delta v}{c}}\right] \\
&= \frac{1}{2}t_0\sqrt{2\frac{\Delta v}{c}}\left[1+\frac{1}{3}+\frac{3}{10}\frac{\Delta v}{c}+\ldots\right] \approx \frac{2}{3}t_0\sqrt{2\frac{\Delta v}{c}}.
\end{aligned}$$

Er nimmt also mit der Quadratwurzel der Geschwindigkeitsänderung ab. Der quadratische Mittelwert der Eigenzeit lautet

$$\begin{aligned}
\left\langle \tau^2 \right\rangle &= \frac{1}{\int\limits_{c-\Delta v}^{c} dv}\int\limits_{c-\Delta v}^{c}\left[\tau(v)\right]^2 dv = \frac{1}{\Delta v}t_0^2\int\limits_{c-\Delta v}^{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)dv = \frac{c}{\Delta v}t_0^2\int\limits_{1-\frac{\Delta v}{c}}^{1}\left(1-x^2\right)dx \\
&= \frac{c}{\Delta v}t_0^2\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{1-\frac{\Delta v}{c}}^{1} = \frac{c}{\Delta v}t_0^2\left(\frac{\Delta v}{c}+\frac{1}{3}\left[\left(1-\frac{\Delta v}{c}\right)^3-1\right]\right) \\
&= \frac{c}{\Delta v}t_0^2\left(\frac{\Delta v^2}{c^2}-\frac{1}{3}\frac{\Delta v^3}{c^3}\right) = t_0^2\frac{\Delta v}{c}\left(1-\frac{1}{3}\frac{\Delta v}{c}\right) \approx \frac{\Delta v}{c}t_0^2,
\end{aligned}$$

woraus sich mit dem Quadrat des Mittelwerts

$$\langle \tau \rangle^2 = \frac{8}{9} t_0^2 \frac{\Delta v}{c}$$

die Unschärfe der Eigenzeit

$$\Delta\tau = \sqrt{\langle \tau^2 \rangle - \langle \tau \rangle^2} \approx \frac{1}{3} t_0 \sqrt{\frac{\Delta v}{c}}$$

ergibt. Ähnlich verfahren wir mit den Momenten der Energie. Der Energiemittelwert und der quadratische Mittelwert steigen beide stark an, um so infinitesimaler sich die Geschwindigkeit der Lichtgeschwindigkeit annähert,

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle &= \frac{1}{\int\limits_{c-\Delta v}^{c} dv} \int\limits_{c-\Delta v}^{c} E(v)dv = \frac{E_0}{\Delta v} \int\limits_{c-\Delta v}^{c} \frac{dv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{\Delta v} E_0 \int\limits_{1-\frac{\Delta v}{c}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{c}{\Delta v} E_0 \left[\arcsin x\right]_{1-\frac{\Delta v}{c}}^{1} \\
&= \frac{c}{\Delta v} E_0 \left[\arcsin 1 - \arcsin\left(1-\frac{\Delta v}{c}\right)\right] = \frac{c}{\Delta v} E_0 \arcsin\sqrt{1-\left(1-\frac{\Delta v}{c}\right)^2} \\
&= \frac{c}{\Delta v} E_0 \arcsin\sqrt{2\frac{\Delta v}{c} - \frac{\Delta v^2}{c^2}} \approx \frac{c}{\Delta v} E_0 \arcsin\left[\sqrt{2\frac{\Delta v}{c}}\left(1-\frac{1}{4}\frac{\Delta v}{c}\right)\right] \approx \sqrt{2}\sqrt{\frac{c}{\Delta v}} E_0,
\end{aligned}$$

wobei das Quadrat des Mittelwerts gegeben ist durch

$$\langle E \rangle^2 = \frac{2c}{\Delta v} E_0^2 .$$

Für den quadratischen Mittelwert müssen wir wegen des steilen Anstiegs der Energie eine Obergrenze wählen, die schneller gegen Null geht als die untere Grenze. Wir wählen dazu den Zwischenwert

$$c > c\left(1-\frac{\Delta v^n}{c^n}\right) > c\left(1-\frac{\Delta v}{c}\right).$$

Damit können wir das Integral im Nenner lösen:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{c(1-\Delta v/c)}^{c(1-\Delta v^n/c^n)} dv &= c\left(1-\frac{\Delta v^n}{c^n}\right) - c\left(1-\frac{\Delta v}{c}\right) = c\left(1-\frac{\Delta v}{c}\right)\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\Delta v}{c}\right)^k - 1\right) \\
&= c\left(1-\frac{\Delta v}{c}\right)\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{\Delta v}{c}\right)^k = c\left(1-\frac{\Delta v}{c}\right)\left(\frac{\Delta v}{c} + \frac{\Delta v^2}{c^2} + \ldots + \frac{\Delta v^{n-1}}{c^{n-1}}\right).
\end{aligned}$$

Mit der endlichen geometrischen Folge

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\Delta v}{c}\right)^k = \frac{1-\dfrac{\Delta v^n}{c^n}}{1-\dfrac{\Delta v}{c}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\Delta v}{c}\right)^{k-1}$$

und einer Potenz von $n=2$ ist

$$\int\limits_{c(1-\Delta v/c)}^{c\left(1-\Delta v^2/c^2\right)} dv = c\left(1-\frac{\Delta v^2}{c^2}\right) - c\left(1-\frac{\Delta v}{c}\right) = \Delta v\left(1-\frac{\Delta v}{c}\right),$$

für $n=3,$ was bereits eine sehr gute Näherung ist, gilt

$$\int\limits_{c(1-\Delta v/c)}^{c\left(1-\Delta v^3/c^3\right)} dv = \Delta v\left(1-\frac{\Delta v^2}{c^2}\right) \approx \Delta v$$

und für $n\to\infty$ ergibt sich unter Verwendung der geometrischen Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\Delta v}{c}\right)^k = \frac{1}{1-\dfrac{\Delta v}{c}}$$

der exakte Wert

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{c(1-\Delta v/c)}^{c\left(1-\Delta v^n/c^n\right)} dv = c\left(1-\frac{\Delta v}{c}\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\Delta v}{c}\right)^k - 1\right) = c\left(1-\frac{\Delta v}{c}\right)\left(\frac{1}{1-\Delta v/c}-1\right) = \Delta v.$$

Die Bestimmung des quadratischen Mittelwerts ist aufgrund des steilen Anstiegs der Energie ein etwas schleppendes Unterfangen:

$$\left\langle E^2\right\rangle = \frac{1}{\int\limits_{c(1-\Delta v/c)}^{c\left(1-\Delta v^n/c^n\right)} dv}\int\limits_{c(1-\Delta v/c)}^{c\left(1-\Delta v^n/c^n\right)}\left[E(v)\right]^2 dv = \frac{E_0^2}{\Delta v}\int\limits_{c(1-\Delta v/c)}^{c\left(1-\Delta v^n/c^n\right)}\frac{dv}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = \frac{cE_0^2}{\Delta v}\int\limits_{1-\Delta v/c}^{1-\Delta v^n/c^n}\frac{dx}{1-x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{cE_0^2}{\Delta v}\left[\ln\frac{1+x}{1-x}\right]_{1-\frac{\Delta v}{c}}^{1-\frac{\Delta v^n}{c^n}} = \frac{1}{2}\frac{cE_0^2}{\Delta v}\left[\ln\frac{2-\dfrac{\Delta v^n}{c^n}}{\dfrac{\Delta v^n}{c^n}} - \ln\frac{2-\dfrac{\Delta v}{c}}{\dfrac{\Delta v}{c}}\right].$$

Führen wir den Grenzübergang

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta v^n}{c^n} = 1-\left(1-\frac{\Delta v}{c}\right)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\Delta v}{c}\right)^k = 1-\left(1-\frac{\Delta v}{c}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\Delta v}{c}\right)^k = 0$$

durch, können wir die Logarithmen mit der Näherung $2-\Delta v/c \approx 2$ in eine divergente harmonische Reihe entwickeln, wobei wir uns auf die linearen Terme beschränken und Terme höherer Ordnung vernachlässigen. Wir erhalten dann folgenden Ausdruck,

$$\begin{aligned}\left\langle E^2 \right\rangle &= \frac{1}{2}\frac{cE_0^2}{\Delta v}\left[\ln\frac{\Delta v}{c} - \ln\frac{\Delta v^n}{c^n}\right] = \frac{1}{2}\frac{cE_0^2}{\Delta v}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-1)^{k+1}}{k}\left(\frac{\Delta v}{c}-1\right)^k + \frac{1}{k}\right] \\ &\approx \frac{1}{2}E_0^2\frac{c}{\Delta v}\left[\frac{\Delta v}{c}+\frac{\Delta v}{c}+\frac{\Delta v}{c}+\frac{\Delta v}{c}+\dots\right] = \frac{n}{2}E_0^2\frac{c}{\Delta v}\frac{\Delta v}{c} = \frac{n}{2}E_0^2,\end{aligned}$$

so daß sich mit dieser einfachen Formel die Varianz

$$\Delta E = \sqrt{\left\langle E^2 \right\rangle - \left\langle E \right\rangle^2} = E_0\sqrt{\frac{n}{2} - \frac{2c}{\Delta v}}$$

berechnen läßt. Entsprechend passen wir die Eigenzeit an:

$$\Delta \tau = \sqrt{\left\langle \tau^2 \right\rangle - \left\langle \tau \right\rangle^2} \approx \frac{1}{3}t_0\sqrt{\frac{\Delta v}{c}}.$$

Damit erhalten wir die Unschärferelation

$$\Delta\tau\Delta E \approx \frac{1}{3}t_0E_0\sqrt{\frac{\Delta v}{c}}\sqrt{\frac{n}{2}-\frac{2c}{\Delta v}} \approx \frac{\hbar}{2}\frac{1}{3}\sqrt{\frac{n}{2}\frac{\Delta v}{c}-2} = \frac{\hbar}{2}.$$

Mittels dieser Beziehung können wir Δv bestimmen, denn wegen $t_0E_0 = \hbar/2$ muß

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{n}{2}\frac{\Delta v}{c}-2} = 1$$

sein. Nach Δv aufgelöst ergibt sich folgende Bestimmungsgleichung:

$$\frac{\Delta v}{c} = \frac{22}{n}.$$

Für Werte $n \le 22$ ergeben sich Überlichtgeschwindigkeiten in der Fluktuation, was bedeutet, daß *n* größer sein muß, sonst ist diese Bedingung nicht in Übereinstimmung mit der Relativitätstheorie. Sie ist aber um so leichter zu erfüllen, je größer *n* ist, denn Δv soll ja mit wachsender Geschwindigkeit möglichst klein werden. In einer klassischen Betrachtungsweise gelten strenggenommen die Grenzwerte

$$\Delta\tau = \frac{1}{3}t_0\lim_{\Delta v\to 0}\sqrt{\frac{\Delta v}{c}} = \sqrt{\frac{22}{9}}t_0\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = t_0\lim_{v\to c}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \to 0$$

und

$$\Delta E = 3E_0 \lim_{\Delta v\to 0}\sqrt{\frac{c}{\Delta v}} = \sqrt{\frac{9}{22}}E_0 \lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = E_0 \lim_{v\to c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \to \infty.$$

Weil aber in der Quantenmechanik die Unschärferelation gilt, kann $\Delta\tau$ weder beliebig klein werden noch ΔE beliebig groß. Die zeitlichen Schwankungen sind am kleinsten für $v = c$ bzw. für $n \to \infty,$ d.h. für $\Delta v = 0.$ Gleichzeitig werden mit diesen Parametern die Energieschwankungen beliebig groß. Die untere Grenze für Δs setzt möglicherweise die Planck-Länge.

Wenn sich der Raum maximal ausgedehnt und seine Temperatur sich fast bis auf den absoluten Temperaturnullpunkt abgekühlt hat, bewegt sich auch das Vakuum kaum noch.

$$\Delta\tau_{\min} = \sqrt{\frac{22}{9}}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot t_0$$

Umgekehrt fluktuiert die zum Raum reziproke Größe, die Energie, nunmehr maximal,

$$\Delta E_{\max} = \sqrt{\frac{9}{22}}\sqrt{n}\cdot E_0.$$

Die Unschärferelation ändert sich dadurch nicht:

$$\Delta\tau_{\min}\Delta E_{\max} = \sqrt{\frac{22}{9}}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot t_0\sqrt{\frac{9}{22}}\sqrt{n}\cdot E_0 = t_0 E_0 = \frac{\hbar}{2}.$$

Rein formal können wir Energie und Eigenzeit vertauschen und wegen der Operatorschreibweise durch ihre konjugiert-komplexen Größen ersetzen,

$$\Delta\overline{E}_{\max}\Delta\overline{\tau}_{\min} = \sqrt{\frac{9}{22}}\sqrt{n}\cdot\overline{E}_0\sqrt{\frac{22}{9}}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\overline{t}_0 = \overline{E}_0\overline{t}_0,$$

womit die Zeitunschärfe in unserem Raum der Energieunschärfe im reziproken Raum entspricht und die Energieunschärfe des Universums der Zeitunschärfe des reziproken Universums. An der Unschärfe selbst ändert sich dadurch nichts,

$$\Delta\tau_{\min}\Delta E_{\max} = \Delta\overline{E}_{\max}\Delta\overline{\tau}_{\min}.$$

Es erklärt aber im Minimum, wohin die Energie verschwindet. Der reziproke Raum muß am Ende komplett aus Freier Energie bestehen, die in unserem Universum einem Minimum zustrebt, im reziproken Raum jedoch maximal wird, was als gute Startbedingung für den nächsten Urknall dienen kann. Aufgrund einer mutmaßlichen Symmetrie des Universums können wir wie folgt umformen:

$$\Delta\tau_{\max}\frac{1}{\Delta\overline{\tau}_{\min}} = \Delta\overline{E}_{\max}\frac{1}{\Delta E_{\min}}.$$

Mit den Definitionen

$$\Delta E_{\min} = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\Delta \overline{\tau}_{\min}} = \Delta \overline{E}_{\max} \quad \text{und} \quad \Delta \overline{\tau}_{\min} = \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\Delta E_{\min}} = \Delta \tau_{\max}$$

folgt durch Vergleich

$$\Delta E_{\min} = \Delta \overline{E}_{\max} \quad \text{bzw.} \quad \Delta \overline{\tau}_{\min} = \Delta \tau_{\max},$$

d.h. der minimalen Energiefluktuation in unserem Universum entspricht eine maximale Energiefluktuation im reziproken Raum und der minimalen Eigenzeitfluktuation im reziproken Raum eine maximale Eigenzeitfluktuation in unserem Universum. Die dafür erforderlichen Abhängigkeiten im reziproken Raum sind als Kehrwerte zu denen in unserem Universum gegeben durch

$$\overline{\tau} = \frac{\overline{t}_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{bzw.} \quad \overline{E} = \overline{E}_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Multiplizieren wir nun die Zeit- und Energiefluktuationen von Universum und reziprokem Raum, so liefern diese den konstanten Betrag von Ruhezeit und Ruheenergie zurück,

$$\tau \overline{\tau} = t_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\overline{t}_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = t_0 \overline{t}_0 = \left| t_0 \right|^2 \quad \text{bzw.} \quad E\overline{E} = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \overline{E}_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = E_0 \overline{E}_0 = \left| E_0 \right|^2.$$

Wir berechnen nun noch die Vakuumfluktuationen im Grenzfall kleiner Geschwindigkeiten unmittelbar nach dem Urknall. Zunächst ist der Geschwindigkeitsmittelwert der Eigenzeit gegeben durch

$$\begin{aligned}
\langle \tau \rangle &= \frac{1}{\int_0^{\Delta v} dv} \int_0^{\Delta v} \tau(v) dv = \frac{t_0}{\Delta v} \int_0^{\Delta v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dv = \frac{c t_0}{\Delta v} \int_0^{\Delta v/c} \sqrt{1 - x^2} \, dx \\
&= \frac{1}{2} \frac{c t_0}{\Delta v} \left[x \sqrt{1 - x^2} + \arcsin x \right]_0^{\Delta v/c} = \frac{1}{2} \frac{c t_0}{\Delta v} \left[\frac{\Delta v}{c} \sqrt{1 - \frac{\Delta v^2}{c^2}} + \arcsin \frac{\Delta v}{c} \right] \\
&\approx \frac{1}{2} t_0 \frac{c}{\Delta v} \left[\frac{\Delta v}{c} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta v^2}{c^2} \right) + \frac{\Delta v}{c} + \frac{1}{6} \frac{\Delta v^3}{c^3} \right] = t_0 \left(1 - \frac{1}{6} \frac{\Delta v^2}{c^2} \right).
\end{aligned}$$

Der quadratische Mittelwert berechnet sich zu

$$\left\langle \tau^2 \right\rangle = \frac{1}{\int\limits_0^{\Delta v} dv} \int\limits_0^{\Delta v} \left[\tau(v)\right]^2 dv = \frac{t_0^2}{\Delta v} \int\limits_0^{\Delta v} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) dv = \frac{c t_0^2}{\Delta v} \int\limits_0^{\Delta v/c} \left(1 - x^2\right) dx$$

$$= \frac{c}{\Delta v} t_0^2 \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\Delta v/c} = t_0^2 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\Delta v^2}{c^2}\right).$$

Entwickeln wir den Arkussinus bis zu Termen 5. Ordnung,

$$\left\langle \tau \right\rangle^2 = \frac{1}{4} t_0^2 \left(1 - \frac{\Delta v^2}{c^2} + 2 \frac{c}{\Delta v} \sqrt{1 - \frac{\Delta v^2}{c^2}} \arcsin \frac{\Delta v}{c} + \left(\frac{c}{\Delta v}\right)^2 \left(\arcsin \frac{\Delta v}{c} \right)^2 \right)$$

$$\approx \frac{1}{4} t_0^2 \left(1 - \frac{\Delta v^2}{c^2} + 2 \frac{c}{\Delta v} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta v^2}{c^2} - \frac{1}{8} \frac{\Delta v^4}{c^4} \right) \left(\frac{\Delta v}{c} + \frac{1}{6} \frac{\Delta v^3}{c^3} + \frac{3}{40} \frac{\Delta v^5}{c^5} \right) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{c}{\Delta v}\right)^2 \left(\frac{\Delta v}{c} + \frac{1}{6} \frac{\Delta v^3}{c^3} + \frac{3}{40} \frac{\Delta v^5}{c^5} \right)^2 \right),$$

ergibt sich der Mittelwert im Quadrat zu

$$\left\langle \tau \right\rangle^2 \approx t_0^2 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\Delta v^2}{c^2} - \frac{1}{45} \frac{\Delta v^4}{c^4} \right)$$

und daraus die Eigenzeitvarianz in Ruhe von

$$\Delta \tau = \sqrt{\left\langle \tau^2 \right\rangle - \left\langle \tau \right\rangle^2} = \sqrt{t_0^2 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\Delta v^2}{c^2} \right) - t_0^2 \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\Delta v^2}{c^2} \right) + \frac{1}{45} t_0^2 \frac{\Delta v^4}{c^4}} = \frac{t_0}{\sqrt{45}} \frac{\Delta v^2}{c^2}.$$

Beschränken wir uns erneut auf Glieder bis zur 5. Ordnung, so beträgt der Energiemittelwert

$$\left\langle E \right\rangle = \frac{1}{\int\limits_0^{\Delta v} dv} \int\limits_0^{\Delta v} E(v) dv = \frac{E_0}{\Delta v} \int\limits_0^{\Delta v} \frac{dv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c E_0}{\Delta v} \int\limits_0^{\Delta v/c} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \frac{c E_0}{\Delta v} \left[\arcsin x \right]_0^{\Delta v/c}$$

$$= \frac{c E_0}{\Delta v} \arcsin \frac{\Delta v}{c} \approx \frac{c}{\Delta v} E_0 \left(\frac{\Delta v}{c} + \frac{1}{6} \frac{\Delta v^3}{c^3} + \frac{3}{40} \frac{\Delta v^5}{c^5} \right) = E_0 \left(1 + \frac{1}{6} \frac{\Delta v^2}{c^2} + \frac{3}{40} \frac{\Delta v^4}{c^4} \right).$$

Der quadratische Mittelwert bis zu Gliedern 5. Ordnung lautet

$$\left\langle E^2\right\rangle = \frac{1}{\int\limits_0^{\Delta v} dv}\int\limits_0^{\Delta v}\left[E(v)\right]^2 dv = \frac{E_0^2}{\Delta v}\int\limits_0^{\Delta v}\frac{dv}{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = \frac{cE_0^2}{\Delta v}\int\limits_0^{\Delta v/c}\frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\frac{cE_0^2}{\Delta v}\left[\ln\frac{1+x}{1-x}\right]_0^{\Delta v/c}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{c}{\Delta v}E_0^2\ln\frac{1+\dfrac{\Delta v}{c}}{1-\dfrac{\Delta v}{c}} \approx \frac{c}{\Delta v}E_0^2\left(\frac{\Delta v}{c}+\frac{1}{3}\frac{\Delta v^3}{c^3}+\frac{1}{5}\frac{\Delta v^5}{c^5}\right) = E_0^2\left(1+\frac{1}{3}\frac{\Delta v^2}{c^2}+\frac{1}{5}\frac{\Delta v^4}{c^4}\right).$$

Mit dem Quadrat des Energiemittelwerts

$$\left\langle E\right\rangle^2 = E_0^2\left(1+\frac{1}{3}\frac{\Delta v^2}{c^2}+\frac{8}{45}\frac{\Delta v^4}{c^4}\right)$$

ist die Energieunschärfe bis auf die Amplitude genauso groß wie die Zeitunschärfe, was nicht unsinnig klingt,

$$\Delta E = \sqrt{\left\langle E^2\right\rangle - \left\langle E\right\rangle^2} = \frac{E_0}{\sqrt{45}}\frac{\Delta v^2}{c^2}.$$

Daß die Fluktuationen von Eigenzeit und Energie im Ruhezustand gleich groß sind, liegt daran, daß die Gleichung

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$$

für $v=0$ identisch erfüllt ist. Die Unschärferelation in der Randsingularität ist somit gegeben durch

$$\Delta\tau\Delta E = \sqrt{\left\langle \tau^2\right\rangle - \left\langle \tau\right\rangle^2}\sqrt{\left\langle E^2\right\rangle - \left\langle E\right\rangle^2} = \frac{1}{45}\frac{\Delta v^4}{c^4}t_0 E_0 = \frac{1}{45}\frac{\Delta v^4}{c^4}\frac{\hbar}{2}.$$

Das kann allerdings nicht die ganze Wahrheit sein. Es folgt nämlich nicht $\Delta v^4/c^4 = 45,$ da sonst Überlichtgeschwindigkeit resultieren würde, sondern wir müssen die Unschärferelationen von Punkt- und Randsingularität addieren, wie wir später noch sehen werden. Die Fluktuationen von Raum und Zeit, Energie und Impuls sind anscheinend ab einer bestimmten Geschwindigkeit, d.h. nach Überschreiten eines Schwellwerts, unabhängig von der Lichtgeschwindigkeit. Das ist mit der Speziellen Relativitätstheorie nicht zu erklären. Allein mit Hilfe der Quantenmechanik kann man zeigen, daß höhere Geschwindigkeiten als die Lichtgeschwindigkeit offenbar möglich sind. Wenn Raum und Zeit sich an einer Stelle im All ändern, hat das Auswirkungen auf den gesamten Raum. Zieht man an einem Ende einer ideal gespannten Kette, merkt man den Umstand, daß gezogen wird, am anderen Ende der Kette über schier unendliche Entfernungen hinweg sofort und ohne daß sich der Zug irgendwie mit Lichtgeschwindigkeit übertragen muß. Von solcher Natur sind also Raum und Zeit, Energie und Impuls. Eine Quantenfluktuation an einer beliebigen Stelle des Raums wird über beliebige Entfernungen hinweg an jeder anderen Stelle des Raums sofort spürbar. Der Grund dafür liegt offenbar in der Quantenverkettung. Stellen wir uns das Vakuum als ein Kontinuum vor, das erfüllt ist von Planckschen Wirkungsquanten, die wie in einem Kristallgitter bestimmte Plätze belegen, so daß eines in Reichweite des anderen liegt. Diese Größen sind quantenmechanisch verschränkte Drehimpulse, so daß jede Änderung dieses Drehimpulses eine „spukhafte“ Fernwirkung an jedem noch so entfernten Ort entfalten kann. Wenn sich also die Energie an einem beliebigen Punkt des Vakuums ändert, bedarf es zur Energieerhaltung nicht erst einer Übertragung an weit entfernte Stellen des Universums, sondern die Energie merkt „sofort“, daß sich etwas geändert hat, und reagiert entsprechend. Nachfolgend ein Gedankenexperiment, wie man sich Quantenteleportation vorstellen kann: Angenommen, Sie haben einen Bleistift, der so lang ist wie das Universum. Diesen schieben Sie, da er keine Ruhemasse haben soll, sondern nur aus Wirkungsquanten besteht, ein kurzes Stück weit durchs All. Dann kommt doch die Information, nämlich der Impuls, den Sie ihm versetzt haben, zur gleichen Zeit am anderen Ende des Weltalls an. Der Bleistift bohrt sozusagen ein Loch durch den Ereignishorizont. Falsch an dieser Darstellung ist natürlich, daß der Bleistift, nicht weil er keine Masse hat, sondern weil der Raum gekrümmt ist, nicht gerade ist, sondern ebenfalls gekrümmt, und seine Spitze sich gerade dort befindet, wo auch sein Ende ist. Nichtsdestotrotz zeigt dieses Beispiel, daß es keines Transports mit Lichtgeschwindigkeit bedarf, um Wirkungen über beliebige Entfernungen instantan zu übertragen. Man braucht dazu lediglich ein Medium. Es erinnert an die frühere Theorie des Äthers, welcher ein solches Medium hätte sein können. Dieser Äther wurde damals als der Träger aller physikalischen Vorgänge angesehen.[3] Heute sprechen wir vielmehr von Nullpunktsenergie oder Quantenvakuum. Mit den Formeln für hohe Geschwindigkeiten

$$\Delta s = c\Delta\tau = \frac{1}{3}ct_0 \lim_{\Delta v\to 0}\sqrt{\frac{\Delta v}{c}} = s_0\sqrt{\frac{22}{9}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = s_0\lim_{v\to c}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \to R_S \neq 0,$$

$$\Delta p = \frac{\Delta E}{c} = 3\frac{\bar{E}_0}{c}\lim_{\Delta v\to 0}\sqrt{\frac{c}{\Delta v}} = p_0\sqrt{\frac{9}{22}}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = p_0\lim_{v\to c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \to \frac{\hbar}{2R_S} \neq \infty$$

definieren wir nun einen reziproken Raum, in dem genau das Gegenteil gilt:

$$\Delta\bar{s} = c\Delta\bar{\tau} = 3c\bar{t}_0 \lim_{\Delta v\to 0}\sqrt{\frac{c}{\Delta v}} = \bar{s}_0\sqrt{\frac{9}{22}}\lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = \bar{s}_0\lim_{v\to c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \to \bar{R}_S \neq \infty,$$

$$\Delta\bar{p} = \frac{\Delta\bar{E}}{c} = \frac{1}{3}\frac{\bar{E}_0}{c}\lim_{\Delta v\to 0}\sqrt{\frac{\Delta v}{c}} = \bar{p}_0\sqrt{\frac{22}{9}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = \bar{p}_0\lim_{v\to c}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \to \frac{\hbar}{2\bar{R}_S} \neq 0.$$

In diesen Gleichungen spiegeln sich die Radien der beiden Singularitäten wider: R_S steht für die Randsingularität, $\bar{R}_S$ für die Punktsingularität. Das heißt aber auch, daß die Randsingularität

[3] „Es kann keinen Zweifel geben, daß der interplanetarische und interstellare Raum nicht leer ist, sondern daß beide von einer materiellen Substanz erfüllt sind, die gewiß die umfangreichste und vermutlich einheitlichste Materie ist, von der wir wissen.“ (James Clerk Maxwell, *Encyclopaedia Britannica*, Neunte Auflage, Band VIII)

am Ende des Universums in einem Schwarzen Loch kleinster Ausdehnung verschwindet, da ihre Energie immer weiter zugenommen hat. Für die Punktsingularität gilt genau das Umgekehrte. Ihre Größe nimmt immer weiter zu, während ihre Energie verschwindet. Gegen Ende des Universums verschwindet auch das Vakuum zwischen den Singularitäten, weil sich der Raum zwischen den Schwarzschildradien schließt. Da die Geschwindigkeit der Randsingularität eigentlich nicht gegen Unendlich geht, sondern gegen Null, können wir alternativ auch schreiben:

$$\Delta s = c\Delta\tau = \frac{1}{3}ct_0 \lim_{\Delta v\to\infty}\sqrt{\frac{\Delta v}{c}} = s_0\sqrt{\frac{22}{9}}\lim_{n\to 0}\frac{1}{\sqrt{n}} = s_0\lim_{v\to 0}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \to R_S \neq \infty,$$
$$\Delta p = \frac{\Delta E}{c} = 3\frac{\bar{E}_0}{c}\lim_{\Delta v\to\infty}\sqrt{\frac{c}{\Delta v}} = p_0\sqrt{\frac{9}{22}}\lim_{n\to 0}\sqrt{n} = p_0\lim_{v\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \to \frac{\hbar}{2R_S} \neq 0.$$

Nunmehr wird der Raum unendlich und die Energie verschwindet. Dabei ist es eine völlige Geschmacksfrage, was man als Punkt- und was als Randsingularität bezeichnet, da zum Zeitpunkt des Urknalls $v = c = 0$ gilt. Das ist mit klassischen Vorstellungen nicht vereinbar,[4] erschließt sich aber aus der Allgemeinen Relativitätstheorie, wonach die Zeit in einem vierdimensionalen Raumzeitkontinuum ebenso gekrümmt ist wie der Raum. Zuzüglich lernen wir, daß Raum und Zeit nicht linear verlaufen, sondern aufgrund der Schwerkraft in sich geschlossene Kurven darstellen. Ferner besitzt das Vakuum Quantennatur.

Für ein nichtrotierendes Schwarzes Loch, das seine Drehbewegung fast ausgehaucht hat, sind die Schwarzschildradien gegeben durch

$$R_S = \frac{2GM_0}{c^2} \quad \text{bzw.} \quad \bar{R}_S = \frac{2G\bar{M}_0}{c^2}.$$

Unter der Annahme $\Delta s = R_S$ erhalten wir eine Abschätzung für

$$\sqrt{\frac{22}{9}}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\Delta v}{c}} = \frac{2R_S M_0 c}{\hbar} = \frac{4GM_0^2}{\hbar c} = \frac{4\cdot 6{,}674\cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}\cdot 10^{106}\,\mathrm{kg^2}}{1{,}054\cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js}\cdot 2{,}998\cdot 10^{8}\,\mathrm{ms^{-1}}}$$
$$= 0{,}845\cdot 10^{122}$$

mit einem verschwindend kleinen Wert von $n = 3{,}42\cdot 10^{-244}$, was einer unvorstellbaren Überlichtgeschwindigkeit von $\Delta v/c = 6{,}43\cdot 10^{244}$ entspricht.

Unter der Annahme $\Delta\bar{s} = \bar{R}_S$ ergibt sich zwar derselbe Wert

$$\sqrt{\frac{9}{22}}\sqrt{n} = 3\sqrt{\frac{c}{\Delta v}} = \frac{2\bar{R}_S M_0 c}{\hbar} = \frac{4GM_0^2}{\hbar c} = 0{,}845\cdot 10^{122},$$

[4] Wohl aber mit quantenmechanischen

aber ein sehr großer Wert von $n = 1,745 \cdot 10^{244}$, was einer extrem geringen Geschwindigkeitsänderung von $\Delta v/c = 12,6 \cdot 10^{-244}$ entspricht.

Setzen wir $\Delta p = \hbar/(2R_S)$, erhalten wir wieder die Abschätzung für

$$\sqrt{\frac{9}{22}}\sqrt{n} = 3\sqrt{\frac{c}{\Delta v}} = \frac{\hbar}{2R_S M_0 c} = \frac{\hbar c}{4GM_0^2} = \frac{1,054 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{Js} \cdot 2,998 \cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1}}{4 \cdot 6,674 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2} \cdot 10^{106}\,\mathrm{kg}^2}$$
$$= 1,18 \cdot 10^{-122}$$

mit dem verschwindend kleinen Wert von $n = 3,42 \cdot 10^{-244}$ und der unvorstellbaren Überlichtgeschwindigkeit von $\Delta v/c = 6,43 \cdot 10^{244}$.

Schließlich interessiert und noch die Gleichung $\Delta\overline{p} = \hbar/2\overline{R}_S$, mit der wir denselben Wert

$$\sqrt{\frac{22}{9}}\frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\Delta v}{c}} = \frac{\hbar}{2\overline{R}_S M_0 c} = \frac{\hbar c}{4GM_0^2} = 1,18 \cdot 10^{-122}$$

mit $n = 1,745 \cdot 10^{244}$ erhalten, was wieder dem verschwindenden Geschwindigkeitsintervall

$$\frac{\Delta v}{c} = \frac{22}{n} = 12,53 \cdot 10^{-244}$$

entspricht. Der Raum expandiert also „schlagartig“ zu einem unwahrscheinlich großen Vielfachen seiner Ruheausdehnung

$$\Delta s = \sqrt{\frac{22}{9}}\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot s_0 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\Delta v}{c}} \cdot s_0 = 0,845 \cdot 10^{122} \cdot s_0,$$

die Energie kollabiert zu einem winzigen Bruchteil ihrer Ruheenergie

$$\Delta E = \sqrt{\frac{9}{22}}\sqrt{n} \cdot E_0 = 3\sqrt{\frac{c}{\Delta v}} \cdot E_0 = 1,18 \cdot 10^{-122} \cdot E_0.$$

Im reziproken Raum hingegen haben wir riesige zeitliche und räumliche Fluktuationen,

$$\Delta\overline{s} = \sqrt{\frac{9}{22}}\sqrt{n} \cdot \overline{s}_0 = 3\sqrt{\frac{c}{\Delta v}} \cdot \overline{s}_0 = 0,845 \cdot 10^{122} \cdot \overline{s}_0,$$

die im Grenzfall der Lichtgeschwindigkeit den reziproken Raum aufspannen. Die Energie des reziproken Raums hingegen „kollabiert“ ebenfalls zu verschwindender Größe:

$$\Delta\overline{E} = \sqrt{\frac{22}{9}}\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \overline{E}_0 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\Delta v}{c}} \cdot \overline{E}_0 = 1,18 \cdot 10^{-122} \cdot \overline{E}_0.$$

Der Raum wird also in reziproke Energie konvertiert, die Energie in reziproken Raum. Würde die Energie des reziproken Raums gegen Null gehen, würde die Orts-Impuls-Unschärfe ebenfalls gegen Null konvergieren, was aber nicht der Fall ist, da das Vakuum augenscheinlich zwischen Raum und reziprokem Raum hin und her fluktuiert,

$$\lim_{v\to c} \Delta\bar{s}\Delta\bar{p} = \bar{R}_S \frac{\hbar}{2\bar{R}_S} = \frac{\hbar}{2} = R_S \frac{\hbar}{2R_S} = \lim_{v\to c} \Delta s \Delta p.$$

In beiden Fällen bleibt also die Wirkung erhalten. Es kann lediglich keine der beteiligten Größen den Ereignishorizont verlassen. Was aber möglich ist, ist ein Austausch von Energie und Zeit, Ort und Impuls, denn beide Räume sind jeweils zueinander reziprok. Somit ist das Ansteigen der Energie nur ein Maß für die Überlichtgeschwindigkeit im reziproken Raum, ohne die kein inflationäres Szenario denkbar ist. Der Beweis geht etwa folgendermaßen: Im klassischen newtonschen Fall haben alle Körper feste Abmessungen, auch das All, und ihre Ruhemasse ist konstant. Raum und Zeit, also reziproke Impusenergie, verschieben sich allerdings gegeneinander, wenn auch nur unmerklich – sie fluktuieren, und zwar sowohl in Ruhe als auch bei maximaler Bewegung. Die Formel

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\Delta v}{c}} \cdot 3\sqrt{\frac{c}{\Delta v}} = 1$$

ist für beliebig kleine Fluktuationen erfüllt, im Limes auch für $\Delta v \to 0.$ Wenn $\Delta v/c$ beliebig klein wird, wird $c/\Delta v$ im reziproken Raum beliebig groß, was einem Vielfachen der Lichtgeschwindigkeit entspricht. Man beachte, daß alle Größen normiert sind. Wenn

$$\Delta E = \sqrt{\frac{9}{22}\sqrt{n}} \cdot E_0 = 3\sqrt{\frac{c}{\Delta v}} \cdot E_0 \quad \text{und} \quad \Delta\bar{E} = \sqrt{\frac{22}{9}\frac{1}{\sqrt{n}}} \cdot \bar{E}_0 = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\Delta v}{c}} \cdot \bar{E}_0$$

ist, ist $\Delta E \Delta\bar{E} = 1{,}18 \cdot 10^{-122} \cdot 0{,}847 \cdot 10^{122} \cdot E_0 \bar{E}_0 = |E_0|^2$. Man muß allerdings beide Male für *n* den gleichen Wert einsetzen, also entweder

$$n = 3{,}40 \cdot 10^{-244} \quad \text{oder} \quad n = 1{,}754 \cdot 10^{244},$$

denn nur dann gilt für die Amplitude der Energiefluktuationen: $|\Delta E| = \sqrt{\Delta E \Delta\bar{E}} = |E_0|$. Analog folgt $|\Delta\tau| = \sqrt{\Delta\tau\Delta\bar{\tau}} = |t_0|$.

Das ist auch logisch, weil die Energie nicht mehr zunehmen kann, wenn sich die Geschwindigkeit nicht mehr ändert, und das All instantan kollabieren muß, um zu einer Singularität zusammenzuschrumpfen. Die zugehörige Fluktuation erstreckt sich über 122 Zehnerpotenzen. So schnell dehnt der Raum sich tatsächlich aus. Aus der nachfolgenden Tabelle geht hervor, daß der reziproke Raum $\Delta\bar{s} = c\Delta\bar{\tau}$ dem Energiezuwachs ΔE des Universums entspricht und der reziproke Impuls $\Delta\bar{p} = \Delta\bar{E}/c$ dem Raumgewinn $\Delta s = c\Delta\tau$.

	$v=0$	$v=c$
ΔE	$\dfrac{E_0}{\sqrt{45}}\dfrac{\Delta v^2}{c^2}$	$3E_0\sqrt{\dfrac{c}{\Delta v}}$
$\Delta\tau$	$\dfrac{t_0}{\sqrt{45}}\dfrac{\Delta v^2}{c^2}$	$\dfrac{1}{3}t_0\sqrt{\dfrac{\Delta v}{c}}$
$\Delta\bar{E}$	$\dfrac{1}{3}\bar{E}_0\sqrt{\dfrac{\Delta v}{c}}$	$\dfrac{\bar{E}_0}{\sqrt{45}}\dfrac{\Delta v^2}{c^2}$
$\Delta\bar{\tau}$	$3\bar{t}_0\sqrt{\dfrac{c}{\Delta v}}$	$\dfrac{\bar{t}_0}{\sqrt{45}}\dfrac{\Delta v^2}{c^2}$

Während des Urknalls prallen zwei Welten aufeinander: die der Punktsingularität mit $v=c$ und die der Randsingularität mit $v=0.$ Insofern müssen wir auch beide Beiträge addieren:

$$\begin{aligned}\Delta E\Delta\tau &= \left(\frac{E_0}{\sqrt{45}}\frac{\Delta v^2}{c^2}+3E_0\sqrt{\frac{c}{\Delta v}}\right)\left(\frac{t_0}{\sqrt{45}}\frac{\Delta v^2}{c^2}+\frac{1}{3}t_0\sqrt{\frac{\Delta v}{c}}\right)\\ &= \left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{\Delta v^3}{c^3}}+\frac{1}{\sqrt{405}}\sqrt{\frac{\Delta v^5}{c^5}}+\frac{1}{45}\sqrt{\frac{\Delta v^8}{c^8}}\right)\frac{\hbar}{2}\approx\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{\Delta v}{c}}^{3}\right)\frac{\hbar}{2}.\end{aligned}$$

Dabei zeigt sich, daß die Unschärferelation nicht konstant ist, sondern den Fluktuationen des Vakuums unterliegt. Ähnlich instabil sind auch die Fluktuationen von Energie und Eigenzeit. Für die Energiefluktuationen zum Zeitpunkt des Urknalls gilt

$$\begin{aligned}\Delta E\Delta\bar{E} &= \left(\frac{E_0}{\sqrt{45}}\frac{\Delta v^2}{c^2}+3E_0\sqrt{\frac{c}{\Delta v}}\right)\left(\frac{1}{3}\bar{E}_0\sqrt{\frac{\Delta v}{c}}+\frac{\bar{E}_0}{\sqrt{45}}\frac{\Delta v^2}{c^2}\right)\\ &= \left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\sqrt{\frac{\Delta v}{c}}^{3}+\frac{1}{\sqrt{405}}\sqrt{\frac{\Delta v}{c}}^{5}+\frac{1}{45}\sqrt{\frac{\Delta v}{c}}^{8}\right)E_0\bar{E}_0\end{aligned}$$

Vernachlässigen wir Terme höherer Ordnung, folgt der Term niedrigster Ordnung

$$|\Delta E|=\sqrt{\Delta E\Delta\bar{E}}\approx\left(1+\frac{1}{\sqrt{20}}\sqrt{\frac{\Delta v}{c}}^{3}\right)|E_0|.$$

Analog ergibt sich

$$|\Delta\tau|=\sqrt{\Delta\tau\Delta\bar{\tau}}\approx\left(1+\frac{1}{\sqrt{20}}\sqrt{\frac{\Delta v}{c}}^{3}\right)|t_0|,$$

wobei der zweite Term den Fluktuationen des Vakuums entspricht. Im Grundzustand des Vakuums gibt es also stets Fluktuationen. Mithin variiert selbst die Wirkung des leeren Raums. Daraus können Universen entstehen.

Wir sind es gewohnt, daß sich nichts schneller bewegen kann als das Licht. Das gilt im Normalfall auch, nicht aber in der Quantenmechanik, und sonderlich nicht beim Urknall, dem beinahe instantan eine inflationäre Expansion folgt, da die eingangs erwähnten Schwingungen des harmonischen Oszillators unter dem Gammablitz aufeinandertreffender Materie und Antimaterie zu einer Resonanzkatastrophe angeregt werden, welche das All aufspannt und der Gravitation entgegenwirkt. Dieser Prozeß wiederholt sich zyklisch. Raum und Zeit werden dabei jedesmal auf Null gesetzt. Ihre Bevorratung erfolgt aus Energie und Impuls. Da die Zeit immer wieder neu beginnt, kann man auch nicht von einem unendlichen Universum sprechen. Das Davor ist das Danach und das Jenseits das Diesseits. Die Wirkung ist die Ursache. Damit erübrigt sich auch jegliche Metaphysik.