Aufgabe: Ein Mann möchte Heizkosten einsparen und nachts die Warmwasserzufuhr drosseln. Beweisen Sie, daß man durch diese Maßnahme keine Energiekosten einsparen kann.

Beweis: Sei $\dot{Q} = C\dot{T}$ eine konstante Heizleistung in einem geschlossenen Wärmekreislauf, wobei C die Wärmekapazität des Wassers ist und T die absolute Temperatur. Formelmäßig berechnet sich die im Zeitraum Δt verbrauchte Wärmeenergie nach der Gleichung

$$\Delta Q = \int_0^{\Delta t} \dot{Q}dt = C\int_0^{\Delta t} \dot{T}dt = C\int_0^{\Delta T} dT = C\Delta T.$$

Falls die zugeführte Leistung konstant ist,

$$\Delta Q = \dot{Q}\int_0^{\Delta t} dt = C\dot{T}\int_0^{\Delta t} dt = C\frac{\Delta T}{\Delta t}\int_0^{\Delta t} dt = C\Delta T,$$

bleibt auch die Wassertemperatur konstant (Abb. 1).

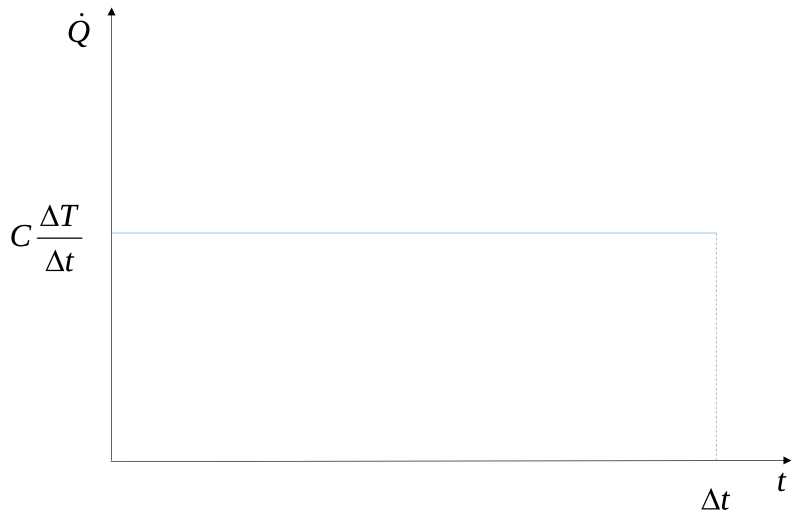

Abbildung 1. Wärmeenergie bei konstanter Heizleistung

Werden nun obigem Vorschlag gemäß zwei unterschiedliche Heizleistungen $\dot{Q}_1 < \dot{Q}$ eingespeist und findet der Wechsel zur Zeit $t = t_1$ statt, nimmt die Wärme und damit die Wassertemperatur immer weiter ab (siehe Abb. 2), da

$$\Delta Q = \int_0^{t_1} \dot{Q}_1 dt + \int_{t_1}^{\Delta t} \dot{Q}dt = C\frac{\Delta T_1}{\Delta t}\int_0^{t_1} dt + C\frac{\Delta T}{\Delta t}\int_{t_1}^{\Delta t} dT = C\frac{\Delta T_1}{\Delta t}t_1 + C\frac{\Delta T}{\Delta t}\left(\Delta t - t_1\right)$$
$$< C\frac{\Delta T}{\Delta t}t_1 + C\frac{\Delta T}{\Delta t}\left(\Delta t - t_1\right) = C\Delta T.$$

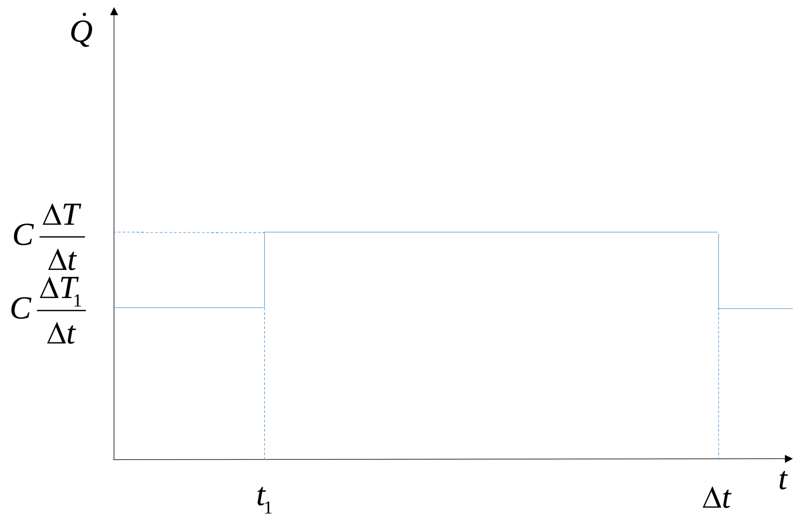

Abbildung 2. Periodisches Absenken der Heizleistung

Da sich das Wärmebad nicht abkühlen darf, wenn am nächsten Morgen wieder die gleiche Wassertemperatur herrschen soll, bedarf es eines zusätzlichen Intervalls mit höherer Heizleistung $\dot{Q}_2 > \dot{Q}$. Die Wärmebilanz lautet dann:

$$\Delta Q = \int_0^{t_1} \dot{Q}_1 dt + \int_{t_1}^{t_2} \dot{Q}_2 dt + \int_{t_2}^{\Delta t} \dot{Q} dt = C\frac{\Delta T_1}{\Delta t} t_1 + C\frac{\Delta T_2}{\Delta t}\left(t_2 - t_1\right) + C\frac{\Delta T}{\Delta t}\left(\Delta t - t_2\right) = C\Delta T.$$

Dieser Fall ist in Abb. 3 dargestellt.

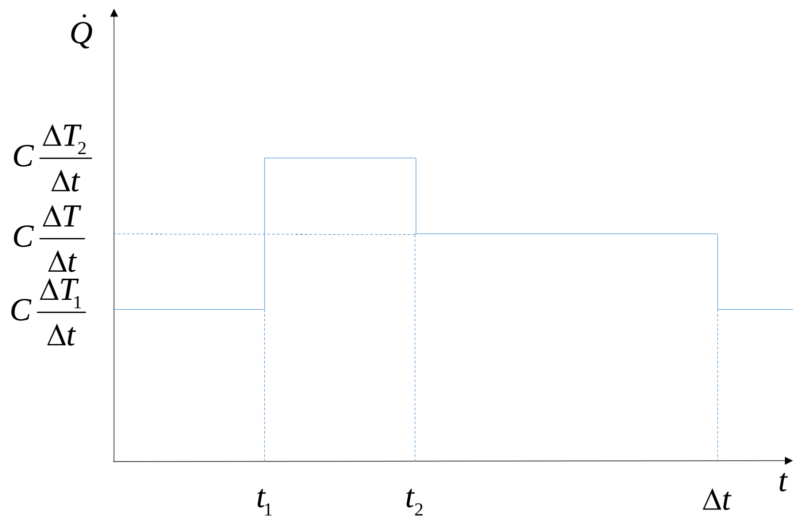

Abbildung 3. Ein Wärmeausgleich führt zu keinerlei Energieeinsparungen

Wir wählen nun das erste und zweite Zeitintervall gleich groß und lassen die Temperatur so weit absinken, wie wir sie zum Ausgleich wieder überhöhen müssen, damit das Wärmebad bei seiner alten konstanten Temperatur bleibt. Die mittlere Wassertemperatur ist wegen

$$\Delta T_2 - \Delta T = \Delta T - \Delta T_1 \quad \text{gleich} \quad \Delta T = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2},$$

daher entfällt dieser Term im nachfolgenden Ausdruck, womit die ursprüngliche Wärmemenge erhalten bleibt,

$$\Delta Q = C\frac{\Delta T_1}{\Delta t}t_1 + C\frac{\Delta T_2}{\Delta t}t_1 + C\frac{\Delta T}{\Delta t}\left(\Delta t - 2t_1\right) = C\frac{\Delta T_1 + \Delta T_2 - 2\Delta T}{\Delta t}t_1 + C\Delta T = C\Delta T.$$

Wenn wir also Energie einsparen möchten und die Leistung nicht überhöhen – das ist genau der Fall, wie ihn Abb. 2 beschreibt, nur daß wir jetzt drei Beiträge angesetzt haben –, geht Wärmenergie verloren, die wir nicht ersetzen können,

$$\begin{aligned}\Delta Q &= C\frac{\Delta T_1}{\Delta t}t_1 + C\frac{\Delta T}{\Delta t}t_1 + C\frac{\Delta T}{\Delta t}\left(\Delta t - 2t_1\right) = C\frac{\Delta T_1}{\Delta t}t_1 + C\frac{\Delta T}{\Delta t}\left(\Delta t - t_1\right)\\ &= C\frac{\Delta T_1 - \Delta T}{\Delta t}t_1 + C\Delta T = C\left[\Delta T - C\frac{\Delta T - \Delta T_1}{\Delta t}t_1\right] < C\Delta T,\end{aligned}$$

d.h. die vorherige Temperatur wird nicht mehr erreicht. Man kann also keine Energie einsparen

qed

