Aufgabe: Leiten Sie die Gleichungen der Speziellen Relativitätstheorie in Kugelkoordinaten her.

Lösung: Betrachten wir das sphärische Dreieck in Abb. 1 für kleine Winkel, die wir aus zeichnerischen Gründen übertrieben groß dargestellt haben. Die angegebenen und nachfolgend definierten Größen entsprechen denen des quadratischen Wegelements $\mathbf{s}_0^2 = \mathbf{s}^2 - \mathbf{x}^2$ der Speziellen Relativitätstheorie, nur handelt es sich eben um keine geraden, sondern um krummlinige Bogenstücke, die auf den Radius normiert sind und daher in Winkeln ausgedrückt werden. Für rechtwinklige Kugeldreiecke gelten die Hauptbeziehungen

$$\cos s_0 = \frac{\cos s}{\cos|\mathbf{x}|}, \quad \cos\alpha = \frac{\tan|\mathbf{x}|}{\tan s}, \quad \sin\beta = \frac{\sin|\mathbf{x}|}{\sin s},$$

die ineinander umgeformt werden können, je nachdem, welche Seite man darstellen möchte. Die Umkehrfunktionen, die wir in der Abbildung sogleich quadratisch dargestellt haben, lauten

$$s_0 = \arccos\frac{\cos s}{\cos|\mathbf{x}|}, \quad |\mathbf{x}| = \arccos\frac{\cos s}{\cos s_0}, \quad s = \arccos\left(\cos s_0 \cos|\mathbf{x}|\right).$$

Wir zeigen nachfolgend, wie sich diese Relationen in einem euklidischen Raum darstellen, sozusagen als Grenzfall für kleine Winkel.[1]

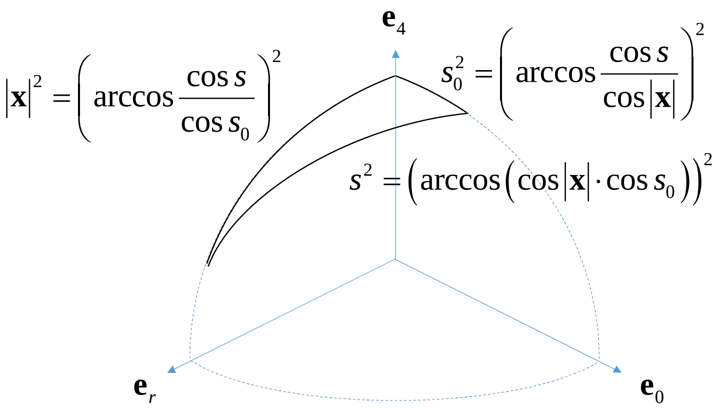

Abbildung 1. Sphärische Trigonometrie des rechtwinkligen Kugeldreiecks für kleine Winkel

Wenn wir den Kosinus für kleine Winkel bis zur zweiten Ordnung entwickeln,

$$\cos s = 1 - \frac{1}{2}s^2 = \left(1-\frac{1}{2}s_0^2\right)\left(1-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2\right) = 1 - \frac{1}{2}s_0^2 - \frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2 + \frac{1}{4}s_0^2|\mathbf{x}|^2 \approx 1 - \frac{1}{2}\left(s_0^2 + |\mathbf{x}|^2\right),$$

folgt aus dem sphärischen Kosinussatz

$$\cos s = \cos s_0 \cos|\mathbf{x}|$$

und den Additionstheoremen der inversen trigonometrischen Funktionen der Ausdruck

[1] Die Spezielle Relativitätstheorie geht von einem nichtgekrümmten Raum aus, was definitiv falsch ist.

$$s = \arccos\left(\cos|\mathbf{x}|\cdot\cos s_0\right) = \arccos\left(1-\frac{1}{2}\left(s_0^2+|\mathbf{x}|^2\right)\right) \approx \arcsin 1 - \arcsin\left(1-\frac{1}{2}\left(s_0^2+|\mathbf{x}|^2\right)\right)$$
$$= \arcsin\sqrt{s_0^2+|\mathbf{x}|^2-\frac{1}{4}\left(s_0^2+|\mathbf{x}|^2\right)^2} \approx \arcsin\sqrt{s_0^2+|\mathbf{x}|^2} \approx \sqrt{s_0^2+|\mathbf{x}|^2},$$

d.h. der Satz des Pythagoras der ebenen Trigonometrie,

$$s^2 \approx s_0^2+|\mathbf{x}|^2 .$$

Ähnlich können wir mit der binomischen Näherung auch die anderen Terme entwickeln,

$$\cos s_0 = \frac{\cos s}{\cos|\mathbf{x}|} = \cos s\sqrt{1+\tan^2|\mathbf{x}|} \approx \cos s\sqrt{1+|\mathbf{x}|^2} \approx \left(1-\frac{1}{2}s^2\right)\left(1+\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2\right)$$
$$= 1-\frac{1}{2}\left(s^2-|\mathbf{x}|^2\right)-\frac{1}{4}s^2|\mathbf{x}|^2 \approx 1-\frac{1}{2}\left(s^2-|\mathbf{x}|^2\right),$$

woraus unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung der Einsteinsche Vierervektor

$$s_0 = \arccos\left(\frac{\cos s}{\cos|\mathbf{x}|}\right) \approx \arccos\left(1-\frac{1}{2}\left(s^2-|\mathbf{x}|^2\right)\right) = \frac{\pi}{2}-\arcsin\left(1-\frac{1}{2}\left(s^2-|\mathbf{x}|^2\right)\right)$$
$$= \arcsin\left(\sqrt{\left(s^2-|\mathbf{x}|^2\right)-\frac{1}{4}\left(s^2-|\mathbf{x}|^2\right)^2}\right) \approx \arcsin\sqrt{s^2-|\mathbf{x}|^2} \approx \sqrt{s^2-|\mathbf{x}|^2}$$

folgt, der aber weiter nichts ist als der umgeformte Satz des Pythagoras in minkowskischer Metrik,

$$s_0^2 = s^2-|\mathbf{x}|^2 = \left(s+|\mathbf{x}|\right)\left(s-|\mathbf{x}|\right).$$

Schließlich können wir nach dem gleichen Schema auch noch den Kosinus der geschwindigkeitsabhängigen Komponente entwickeln,

$$\cos|\mathbf{x}| = \frac{\cos s}{\cos s_0} = \cos s\sqrt{1+\tan^2 s_0} \approx \cos s\sqrt{1+s_0^2} \approx \left(1-\frac{1}{2}s^2\right)\left(1+\frac{1}{2}s_0^2\right)$$
$$= 1-\frac{1}{2}\left(s^2-s_0^2\right)-\frac{1}{4}s^2 s_0^2 \approx 1-\frac{1}{2}\left(s^2-s_0^2\right),$$

und nach dem gleichen Muster auflösen,

$$|\mathbf{x}| = \arccos\left(\frac{\cos s}{\cos s_0}\right) \approx \arccos\left(1-\frac{1}{2}\left(s^2-s_0^2\right)\right) = \frac{\pi}{2}-\arcsin\left(1-\frac{1}{2}\left(s^2-s_0^2\right)\right)$$
$$= \arcsin\left(\sqrt{\left(s^2-s_0^2\right)-\frac{1}{4}\left(s^2-s_0^2\right)^2}\right) \approx \arcsin\sqrt{s^2-s_0^2} \approx \sqrt{s^2-s_0^2}.$$

In der näheren Umgebung der Singularität erhalten wir somit die quadratischen Wegelemente für die Katheten und die Hypotenuse:

$$s_0^2 = s^2-|\mathbf{x}|^2 = s^2\left(1-\frac{|\mathbf{x}|^2}{s^2}\right), \quad |\mathbf{x}|^2 = s^2\left(1-\frac{s_0^2}{s^2}\right) = \frac{|\mathbf{x}|^2}{s^2}, \quad s^2 = s_0^2+|\mathbf{x}|^2 .$$

Unser Diagramm sieht nun folgendermaßen aus,

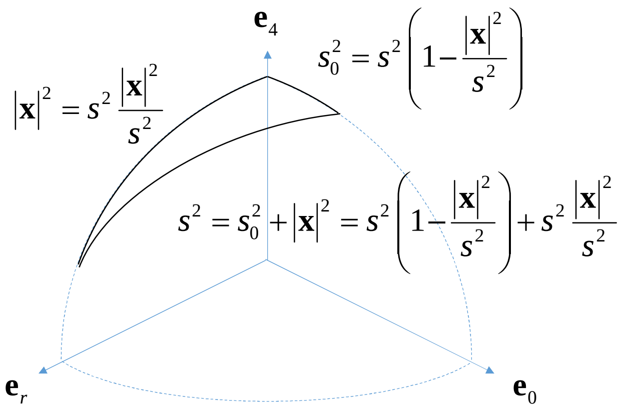

Abbildung 2. Sphärische Trigonometrie des rechtwinkligen Kugeldreiecks für kleine Winkel

es beschreibt allerdings nicht die Realität der Gravitation in Kugelkoordinaten. Es zeigt sich, daß die euklidische Näherung der Realität der Gravitation nicht angemessen ist. Betrachten wir nämlich ein gleichseitiges Kugeldreieck, wie in Abb. 3 dargestellt, und zerlegen es in zwei komplementäre sphärische Dreiecke, so stellt sich heraus, daß die Aussagen gemäß Abb. 2 in Strenge nur für $s = \pi/2$ gelten.

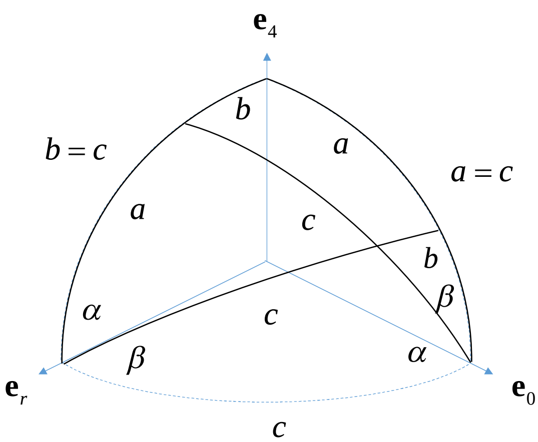

Abbildung 3. Sphärische Zerlegung eines gleichseitigen Kugeldreiecks in zwei komplementäre rechtwinklige Dreiecke

Da das All einen Umfang von 2π hat, können wir gerade einmal ein Drittel des Weltalls überblicken, in einer Richtung maximal einen Winkel von $\pi/6$. Ein Winkel von 60° nach einer Seite kann aber nicht mehr als klein angesehen werden. Die Relativitätstheorie ist daher strenggenommen nicht exakt.

Aus dem Kosinussatz des gleichseitigen Kugeldreiecks folgt für den rechten Winkel $\gamma = \pi/2$ die Relation

$$\cos\gamma = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} = \frac{\cos c - \cos^2 c}{\sin^2 c} = 0$$

bzw. $\cos c = 1$ oder $c = \gamma$. Für die beiden Teildreiecke lauten die entsprechenden Kosinussätze

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = \frac{\cos a - \cos^2 c}{\sin^2 c} = \cos a,$$
$$\cos\beta = \frac{\cos b - \cos c \cos a}{\sin c \sin a} = \frac{\cos b - \cos^2 c}{\sin^2 c} = \cos b.$$

Aus dem Sinussatz

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} = \sin c = 1$$

folgen schließlich die Beziehungen

$$\sin\alpha = \sin a, \quad \sin\beta = \sin b, \quad \sin\gamma = \sin c.$$

Die Winkel in Grad entsprechen den Bogenlängen im Bogenmaß

$$a = \alpha, \quad b = \beta, \quad c = \gamma,$$

die wir wie die Winkel zu einem Maximalwert c bzw. γ addieren können, wenn dabei der Wert von $\pi/2$ nicht überschritten wird,

$$a + b = c \quad \text{bzw.} \quad \alpha + \beta = \gamma.$$

Mit

$$a = s_0, \quad b = |\mathbf{x}|, \quad c = s$$

gelten folgende Entsprechungen:

$$s_0 + |\mathbf{x}| = s \quad \text{bzw.} \quad \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

Dann sieht unser Diagramm wie folgt aus:

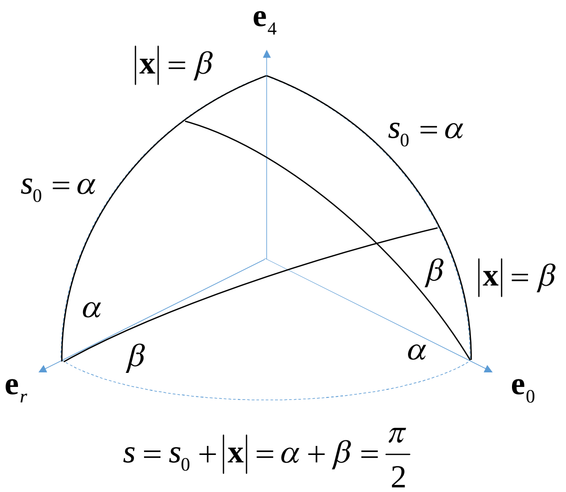

Abbildung 4. Zerlegung des Weltalls in ein radiales und ein dazu senkrechtes Teildreieck

In der Singularität beginnen wir wegen $|\mathbf{x}| = 0$ mit dem maximalen potentiellen Raum $s_0 = s$. Wenn das Weltall hingegen sein Endstadium erreicht hat und völlig zerstrahlt ist, also Lichtgeschwindigkeit angenommen hat, d.h. $|\mathbf{x}| = s$, verschwindet der potentielle Raum, d.h. $s_0 = 0$, was nichts anderes bedeutet, als daß alle potentiellen Größen vollständig in kinetische umgewandelt worden sind. Der von Einstein beschrittene Weg ist also strenggenommen nicht korrekt, da der Raum Kugelsymmetrie aufweist, und nicht euklidisch ist. Da der Term $|\mathbf{x}|/s$ nur von der Geschwindigkeit in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit abhängt, und nicht von der Zeit, können wir ihn wie auch den Term s_0/s in unseren Gleichungen wie folgt abseparieren:

$$|\mathbf{x}|^2 = s^2 - s_0^2 = s^2 \frac{|\mathbf{x}|^2}{s^2} \quad \text{bzw.} \quad s_0^2 = s^2 - |\mathbf{x}|^2 = s^2 \left(1 - \frac{|\mathbf{x}|^2}{s^2}\right).$$

Dann setzt sich der vierdimensionale Raum s nach dem Satz des Pythagoras trotz krummliniger Koordinaten aus zwei zueinander senkrechten Beiträgen zusammen, einem potentiellen und einem kinetischen Raum, die beide von der Geschwindigkeit abhängen, in der Summe aber konstant sind:

$$s^2 = s_0^2 + |\mathbf{x}|^2 = s^2 \left(1 - \frac{|\mathbf{x}|^2}{s^2}\right) + s^2 \frac{|\mathbf{x}|^2}{s^2}.$$

Unsere Situation gestaltet sich damit wie in Abb. 5 gezeigt, wobei wir uns nicht gescheut haben, anstelle der Winkel sogleich die pythagoräischen Seitenquadrate zu verwenden.

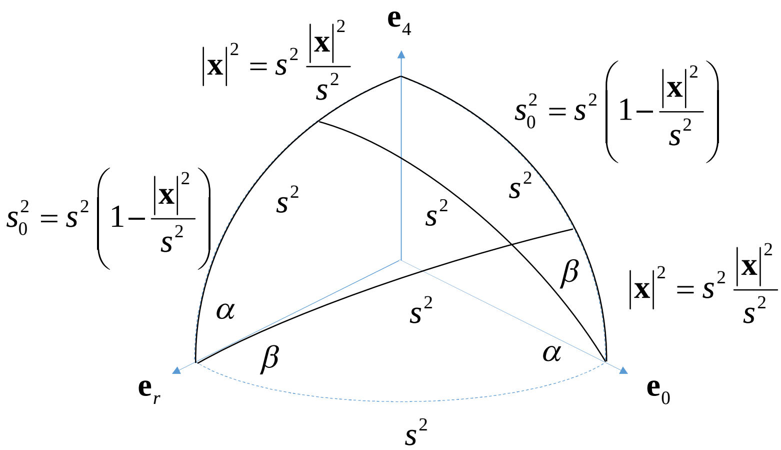

Abbildung 5. Die Einsteinschen Gleichungen in allgemeiner nichteuklidischer Form

In Vektornotation $\mathbf{s} = \mathbf{s}_0 + |\mathbf{x}|$ gilt wegen der Orthogonalität der Achsen $\mathbf{s}_0 \cdot |\mathbf{x}| = 0$ der Satz des Pythagoras,

$$\mathbf{s}^2 = \left(\mathbf{s}_0 + |\mathbf{x}|\right)^2 = \mathbf{s}_0^2 + 2\mathbf{s}_0 \cdot |\mathbf{x}| + |\mathbf{x}|^2 = \mathbf{s}_0^2 + |\mathbf{x}|^2,$$

der nichts anderes ist als der ominöse Einsteinsche Vierervektor in Minkowski-Metrik,

$$\mathbf{s}_0^2 = \mathbf{s}^2 - |\mathbf{x}|^2 = \left(\mathbf{s} + |\mathbf{x}|\right)\left(\mathbf{s} - |\mathbf{x}|\right).$$

Wenn der kinetische Raum maximal ist, d.h. $|\mathbf{x}| = s,$ verschwindet der potentielle, und umgekehrt der kinetische, wenn $s_0 = s$ ist. Beide zusammen ergeben jedoch den gesamten konstanten Raum. Da wir nur den kinetischen Raum kennen und der potentielle unserer Anschauung fremd ist, gewinnen wir den Eindruck, daß die Galaxien von uns wegfliegen, solange die Lichtgeschwindigkeit noch nicht erreicht ist. Sie fliegen aber nicht in longitudinaler Richtung davon, sondern in transversaler, denn in die longitudinale bzw. radiale Richtung können wir nicht blikken; dort liegt die Vergangenheit. Alles Geschehen spielt sich in vier Dimensionen auf der „planen" Oberfläche einer Kugel ab. Mit den Abkürzungen

$$\frac{1}{\gamma^2} = 1 - \frac{|\mathbf{x}|^2}{s^2} \quad \text{bzw.} \quad 1 - \frac{1}{\gamma^2} = \frac{|\mathbf{x}|^2}{s^2},$$

wobei γ der sogenannte Lorentz-Faktor ist, nimmt der Raum folgende Gestalt an,

$$s^2 = s^2 \frac{1}{\gamma^2} + s^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right).$$

Spätestens nach der Umformung

$$\frac{s^2}{\gamma^2} = s^2 - s^2 \left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = s^2 - s^2 \frac{|\mathbf{x}|^2}{s^2} = s^2 \left(1 - \frac{|\mathbf{x}|^2}{s^2}\right) = s^2 - |\mathbf{x}|^2 = s_0^2$$

erkennen wir, daß wegen $s^2 = \gamma^2 s_0^2$ die Relation

$$s = \frac{s_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

gilt, die uns sogleich an Einsteins Äquivalenz von Masse und Energie erinnert. Der vierdimensionale Raum kann sich nicht ausdehnen, denn während der kinetische expandiert, schrumpft der potentielle, und umgekehrt, wobei aber die quadratische Summe aus beiden stets konstant bleibt. Die Gleichung

$$s = \gamma s_0 = \gamma \frac{1}{\gamma} s$$

ist ein Henne-Ei-Problem, denn sobald die Frage auftaucht, welcher Raum zuerst da war, der potentielle oder der kinetische, zeigt es sich, daß das Ei doch früher dagewesen sein muß.[2] Nur wenn man annimmt, daß die Zeit ein Kreis ist, gilt *Zukunft kommt vor Vergangenheit*. Der Sohn existierte bereits als Materie, ehe ihn sein Vater gezeugt hat, wenn man die Zeit rückwärts laufenläßt, und das tut man, wenn man am Ende der Zeit wieder bei der Vergangenheit anfängt. Daher muß das Ei, welches der Henne entschlüpft ist, bereits vor der Henne dagewesen sein. Der deterministische Entwicklungsprozeß der Kausalität suggeriert uns lediglich, daß so etwas auf einer linearen Zeitskala nicht möglich. Bindet man jedoch die beiden Enden der Zeit zu einer Zeitschleife zusammen, könnte man sich theoretisch selbst einholen, nur kann man das eben nicht, weil man kausal nichts verändern kann. Nur das gleiche kann sich wiederholen.

[2] Beim Urknall tauschen potentielle und kinetische Energie lediglich ihre Rollen und der Prozeß kehrt sich um.

