Aufgabe: Sie fliegen mit einem UAV in der Atmosphäre eines wasserlosen magnetfeldfreien Planeten oder Mondes, dessen Oberfläche zwar topographisch vermessen ist, auf dem aber kein GPS-System installiert ist. Wie navigieren Sie?

Lösung: Zum Zeitpunkt der Ortsbestimmung (siehe Abb. 1) befinde sich das Flugzeug in einem kartesischen Koordinatensystem im radialen Abstand ρ_1 vom topographischen Meßpunkt $(x_{1,}, y_1, z_1)$ und im Abstand ρ_2 vom topographischen Meßpunkt $(x_{2,}, y_2, z_2)$. Im bewegten Bezugssystem sei das Flugzeug selbst am Ort $(0, 0, h)$. Die Peilung der topographischen Meßpunkte erfolge in einem Inertialsystem unter den Elevationswinkeln ε_1 und ε_2, wobei wir die Winkel nach unten positiv zählen. Ferner sei der topographische Punkt 2 weiter entfernt als der topographische Punkt 1, womit $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. Der Differenzwinkel im Azimut zwischen den beiden topographischen Punkten sei φ. Nun wählen wir die Entfernungen ohne Beschränkung der Allgemeinheit so, daß wir keine sphärischen Koordinaten für Länge und Breite verwenden müssen. Dann sind die radialen Abstände im Aufpunkt gegeben durch

$$\rho_1 = h \tan \varepsilon_1 \quad \text{und} \quad \rho_2 = (h - \Delta z) \tan \varepsilon_2 ,$$

womit nach dem Kosinussatz der Abstand $\Delta\rho$ zwischen den beiden topographischen Punkten durch die Gleichung

$$\Delta\rho^2 = \|\vec{x}_2 - \vec{x}_1\|^2 = \rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos\varphi$$

beschrieben wird.

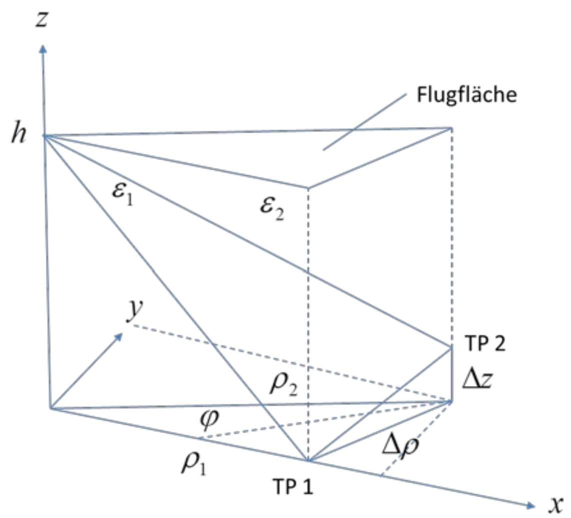

Abbildung 1. Schematische Anordnung zur Peilung zweier topographischer Punkte von einer Flugfläche aus

Setzen wir die radialen Abstände in diese Gleichung ein, erhalten wir den Ausdruck

$$\Delta\rho^2 = (h - \Delta z)^2 \tan^2 \varepsilon_2 + h^2 \tan^2 \varepsilon_1 - 2h(h - \Delta z) \tan \varepsilon_1 \tan \varepsilon_2 \cos\varphi$$

und nach Umformung eine quadratische Gleichung:

$$\left(\tan^2\varepsilon_1 - 2\tan\varepsilon_1\tan\varepsilon_2\cos\varphi + \tan^2\varepsilon_2\right)h^2 + 2\Delta z\tan\varepsilon_2\left(\tan\varepsilon_1\cos\varphi - \tan\varepsilon_2\right)h + \Delta z^2\tan^2\varepsilon_2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 = 0.$$

Diese bringen wir auf die übersichtlichere Form

$$ah^2 + bh + c = 0.$$

Es ergeben sich die beiden Lösungen

$$h_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

wobei die Abkürzungen gegeben sind durch

$$\begin{aligned} a &= \tan^2\varepsilon_1 - 2\tan\varepsilon_1\tan\varepsilon_2\cos\varphi + \tan^2\varepsilon_2, \\ b &= -2\Delta z\tan\varepsilon_2\left(\tan\varepsilon_2 - \tan\varepsilon_1\cos\varphi\right), \\ c &= -\Delta x^2 - \Delta y^2 + \Delta z^2\tan^2\varepsilon_2. \end{aligned}$$

Betrachten wir zunächst den Spezialfall der Deckungspeilung $\varphi = 0$ mit $z_2 > z_1$, dann vereinfachen sich die obigen Koeffizienten für $\Delta y = 0$ und $x_2 > x_1$ zu

$$\begin{aligned} a &= \left(\tan\varepsilon_1 - \tan\varepsilon_2\right)^2, \\ b &= 2\Delta z\tan\varepsilon_2\left(\tan\varepsilon_1 - \tan\varepsilon_2\right), \\ c &= \Delta z^2\tan^2\varepsilon_2 - \Delta x^2, \end{aligned}$$

und die Lösungen der quadratischen Gleichung sind ebenfalls sehr einfach zu berechnen:

$$h_{1,2} = \frac{-\Delta z\tan\varepsilon_2 \pm \Delta x}{\tan\varepsilon_1 - \tan\varepsilon_2}.$$

Da die Höhe nicht negativ sein kann, folgt mit dem positiven Vorzeichen für den vertikalen Abstand vom unteren topographischen Punkt das nunmehr eindeutige Ergebnis

$$h = \frac{\Delta x - \Delta z\tan\varepsilon_2}{\tan\varepsilon_1 - \tan\varepsilon_2}.$$

Für $z_1 = z_2$ ist $\Delta z = 0$, und die Koeffizienten lauten

$$\begin{aligned} a &= 2\left(1 - \cos\varphi\right)\tan^2\varepsilon, \\ b &= 0, \\ c &= -\left(\Delta x^2 + \Delta y^2\right). \end{aligned}$$

In diesem Fall ergibt sich der einfache Ausdruck

$$h = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\sqrt{1 - \cos\varphi}\,\tan\varepsilon}.$$

Man kann die gesamte Berechnung auch in Kugelkoordinaten durchführen, was jedoch für die Demonstration der prinzipiellen Machbarkeit ohne Belang ist.

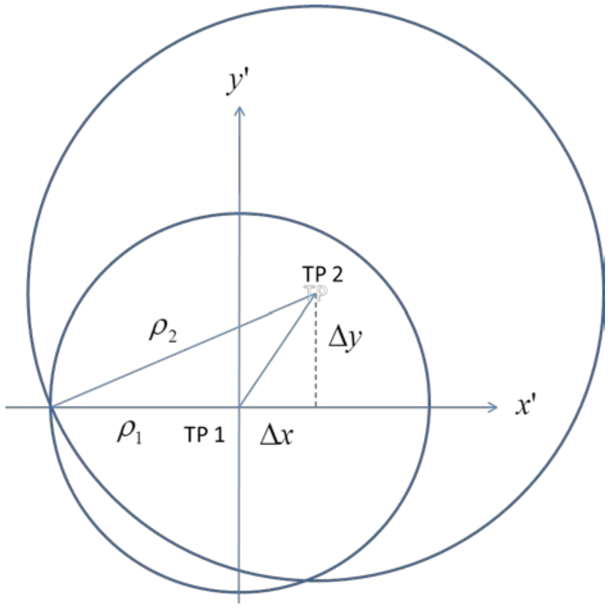

Abbildung 2. Positionsbestimmung mittels Schnittpunkten zweier Kreise

Die Standortbestimmung erfolgt durch Schneiden der beiden Kreise

$$x^2 + y^2 = \rho_1^2,$$
$$(x - \Delta x)^2 + (y - \Delta y)^2 = \rho_2^2$$

im Koordinatensystem eines der beiden topographischen Punkte (siehe Abb. 2). In unserem Beispiel haben wir dafür TP 1 gewählt. Setzen wir $x = \alpha - \beta \cdot y$ in die einfachere der beiden Kreisgleichungen ein, so erhalten wir mit den Abkürzungen

$$\alpha = \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2}{2\Delta x},$$
$$\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

die Lösungen

$$y_3 = \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1}, \qquad y_4 = \frac{-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4a_1c_1}}{2a_1},$$
$$x_3 = \alpha - \beta \cdot y_3, \qquad x_4 = \alpha - \beta \cdot y_4,$$

wobei die Koeffizienten der quadratischen Gleichung gegeben sind durch

$$a_1 = 1 + \beta^2, \quad b_1 = -2\alpha\beta, \quad c_1 = \alpha^2 - \rho_1^2.$$

Zum Schluß muß noch unter Beachtung des Vorzeichens die richtige Lösung herausgefunden werden. Diese findet man durch Berechnung der Flächennormalen mit Hilfe der Vektorprodukte $\Delta\vec{x} \times \vec{x}_3$ und $\Delta\vec{x} \times \vec{x}_4$, wobei

$$\begin{aligned}\Delta\vec{x} &= \Delta x \vec{e}_x + \Delta y \vec{e}_y,\\ \vec{x}_3 &= x_3 \vec{e}_x + y_3 \vec{e}_y,\\ \vec{x}_4 &= x_4 \vec{e}_x + y_4 \vec{e}_y.\end{aligned}$$

Daraus folgen die Vektoren der Flächennormalen zu

$$\Delta\vec{x} \times \vec{x}_3 = (\Delta x \cdot y_3 - \Delta y \cdot x_3)\vec{e}_z \quad \text{und} \quad \Delta\vec{x} \times \vec{x}_4 = (\Delta x \cdot y_4 - \Delta y \cdot x_4)\vec{e}_z.$$

Legt man die Reihenfolge der topographischen Punkte im mathematisch positiven Drehsinn fest, so muß der richtige Normalenvektor ein positives Vorzeichen haben. In dem nachfolgenden Beispiel liefert nur das Paar $(x_{3,}, y_3)$ ein positives Vorzeichen. Der gemessene Standort hat damit im gestrichenen Koordinatensystem des 1. topographischen Punkts die Koordinaten $(-5, 0, 5)$.

Zur Kalibrierung des Navigationskreisels muß das Flugzeug exakt mit der Verbindungsgeraden zweier bekannter topographischer Punkte in Deckungspeilung gebracht werden, um so die Nordrichtung des Inertialsystems festzulegen. Die *x*-*y*-Ebene wird durch den künstlichen Horizont definiert. Die Kalibrierung muß wegen der Kreiseldrift in angemessenen Abständen wiederholt werden. Lassen sich im Missionsgebiet über längere Distanzen keine topographischen Punkte auffinden, muß vorübergehend Koppelnavigation zum Einsatz kommen. Innerhalb unseres Sonnensystems wäre nachts eine Positionsbestimmung auch mit einem automatischen Sextanten bzw. einem Sternentracker möglich, sofern eine analytische oder numerische Ephemeridenberechnung anhand tabellarischer Meßwerte möglich ist. Bei einem im Orbit über dem jeweiligen Planeten kreisenden Satelliten könnte die Navigation auch durch Bildkorrelation durchgeführt werden, sofern der Satellit an der richtigen Stelle steht. Ohne jegliches Referenzsystem ist eine Navigation nicht möglich.

```
% Flugnavigation auf extraterrestrischen Himmelskörpern

% Als bekannt vorausgesetzte topographische Punkte und daraus abgeleitete
% bekannte Größen

x1 = 5;
y1 = 0;
z1 = 0;

x2 = 7;
y2 = 3;
z2 = 2;

Delta_x = x2 - x1;
Delta_y = y2 - y1;
Delta_z = z2 - z1;
Delta_rho = sqrt((x2 - x1)^2 + (y2 - y1)^2);
```



```
% Berechnungen zu Testzwecken
rho1_test = sqrt(x1^2 + y1^2);
rho2_test = sqrt(x2^2 + y2^2);
h_test = 5;
epsilon1 = atan(rho1_test/h_test);
epsilon2 = atan(rho2_test/(h_test - Delta_z));
phi = acos((rho1_test^2 + rho2_test^2 - Del-
ta_rho^2)/(2*rho1_test*rho2_test));

% Positionsmessung
a = tan(epsilon1)^2 - 2*tan(epsilon1)*tan(epsilon2)*cos(phi) +
tan(epsilon2)^2;
b = -2*Delta_z*tan(epsilon2)*(tan(epsilon2) - tan(epsilon1)*cos(phi));
c = - Delta_x^2 - Delta_y^2 + Delta_z^2*tan(epsilon2)^2;

h = (-b + sqrt(b^2 - 4*a*c))/2/a
rho1 = h*tan(epsilon1)
rho2 = (h - Delta_z)*tan(epsilon2)

% Berechnung der beiden Schnittpunkte
alpha = (rho1^2 - rho2^2 + Delta_x^2 + Delta_y^2)/2/Delta_x;
beta = Delta_y/Delta_x;

a1 = 1+beta^2;
b1 = -2*alpha*beta;
c1 = alpha^2-rho1^2;

y3 = (-b1 + sqrt(b1^2 - 4*a1*c1))/2/a1
x3 = alpha - beta*y3

y4 = (-b1 - sqrt(b1^2 - 4*a1*c1))/2/a1
x4 = alpha - beta*y4

% Bestimmung des positiven Vorzeichens durch Flächenberechnung

S3 = Delta_x*y3 - Delta_y*x3
S4 = Delta_x*y4 - Delta_y*x4
```

```
>> flugnavigation

h = 5.0000
rho1 = 5.0000
rho2 = 7.6158
y3 = 0
x3 = -5.0000
y4 = -4.6154
x4 = 1.9231
S3 = 15.0000
S4 = -15.0000
```