Aufgabe: Berechnen Sie die Trägheitsmomente und Drehimpulse zweier zu fusionierender Schwarzer Löcher.

Lösung: Das Trägheitsmoment einer Sphäre ist definiert durch das Integral

$$I = \int \rho^2 dm$$

über alle Massenelemente $dm = \sigma dS$ einer Oberfläche *S* mit Radius *r* und Oberflächendichte

$$\sigma = \frac{m}{S} = \frac{m}{4\pi r^2}.$$

Wie wir in Physikaufgabe [194] gezeigt haben, gilt für die Oberflächendichten und Radien die Relation $\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2 = \sigma R_S$. Dementsprechend sind die Massen der beiden Schwarzen Löcher gegeben durch

$$m_1 = 4\pi\sigma_1 R_1^2 = 4\pi\sigma R_S R_1 \quad \text{bzw.} \quad m_2 = 4\pi\sigma_2 R_2^2 = 4\pi\sigma R_S R_2,$$

mit einer Gesamtmasse von

$$M = m_1 + m_2 = 4\pi\sigma R_S \left(R_1 + R_2\right) = 4\pi\sigma R_S^2.$$

Am Verhältnis der Massen sehen wir, daß diese sich wie die Radien verhalten:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{4\pi\sigma R_S R_1}{4\pi\sigma R_S R_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Wir werden die Beziehung $m_1 R_2 = m_2 R_1$ später verwenden. Der senkrechte Abstand der Massenelemente zur Drehachse ρ ist mit dem Kugelradius *r* durch folgende Relation verknüpft,

$$\rho = r\sin\theta,$$

wobei θ der Winkel zwischen Radius und Drehachse ist. Damit ergibt sich das folgende Flächenelement:

$$dS = \rho d\varphi \cdot r d\theta = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi.$$

Setzen wir dieses in das Trägheitsintegral ein, folgt

$$I = \sigma \int r^2 \sin^2\theta dS = \sigma r^4 \int \sin^3\theta d\theta d\varphi,$$

wobei wir die Oberflächendichte wegen der Konstanz des Radius vor das Integralzeichen ziehen können. Am Ende verbleiben nur die beiden Integrationen über θ und φ:

$$I = \frac{mr^2}{4\pi} \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{mr^2}{2} \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{mr^2}{2}\left[-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right]_0^\pi.$$

Setzen wir die Integrationsgrenzen ein, ergibt sich das Trägheitsmoment einer Sphäre, sprich eines Schwarzen Lochs, um eine Achse durch den Mittelpunkt:

$$I=\frac{mr^2}{2}\left[-\cos\pi+\frac{1}{3}\cos^3\pi+1-\frac{1}{3}\right]=\frac{2}{3}mr^2.$$

Der entsprechende Drehimpuls lautet

$$L=I\omega=\frac{2}{3}mr^2\dot{\varphi},$$

wobei $\omega=\dot{\varphi}$ die Winkelgeschwindigkeit ist. Die beiden zu fusionierenden Schwarzen Löcher besitzen demnach folgende Drehimpulse um ihre eigenen Symmetrieachsen:

$$L_1=I_1\omega=\frac{2}{3}m_1R_1^2\dot{\varphi}\quad\text{bzw.}\quad L_2=I_2\omega=\frac{2}{3}m_2R_2^2\dot{\varphi}.$$

Diese müssen nun – weil wir sie addieren wollen – mit Hilfe des Satzes von Steiner auf eine gemeinsame Drehachse umgerechnet werden. Den Schwerpunkt haben wir in Physikaufgabe [194] ebenfalls bereits berechnet. Er liegt im Abstand des Radius des „Satelliten" bei $\overline{r}=R_2$. Nach dem Satz von Steiner lauten die Trägheitsmomente, bezogen auf eine gemeinsame Achse durch den Schwerpunkt, wie folgt:

$$I_1=\frac{2}{3}m_1R_1^2+m_1\left(\overline{r}-r_1\right)^2=\frac{2}{3}m_1R_1^2+m_1\left(R_2-r_1\right)^2=\frac{2}{3}m_1R_1^2+m_1R_2^2,$$
$$I_2=\frac{2}{3}m_2R_2^2+m_2\left(r_2-\overline{r}\right)^2=\frac{2}{3}m_2R_2^2+m_2\left(r_2-R_2\right)^2=\frac{2}{3}m_2R_2^2+m_2R_1^2,$$

wobei wir $r_1=0$ und $r_2=r_2-r_1=r=R_S$ gesetzt haben. Das Gesamtträgheitsmoment ist damit gegeben durch

$$I=\frac{2}{3}\left(m_1R_1^2+m_2R_2^2\right)+m_1R_2^2+m_2R_1^2.$$

Die Drehimpulse

$$L_1=\left(\frac{2}{3}m_1R_1^2+m_1R_2^2\right)\dot{\varphi},\quad L_2=\left(\frac{2}{3}m_2R_2^2+m_2R_1^2\right)\dot{\varphi}$$

addieren sich nach Multiplikation der Trägheitsmomente mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}$ zu einem Gesamtdrehimpuls von

$$L=L_1+L_2=\left[\frac{2}{3}\left(m_1R_1^2+m_2R_2^2\right)+m_1R_2^2+m_2R_1^2\right]\dot{\varphi}.$$

Mittels der oben abgeleiteten Relation $m_1R_2=m_2R_1$ können wir die Drehimpulskomponenten wie folgt umformen,

$$L_1 = \left(\frac{2}{3} m_1 R_1^2 + m_1 R_2^2\right)\dot{\varphi} = \left(\frac{2}{3} m_1 R_1^2 + m_2 R_1 R_2\right)\dot{\varphi},$$
$$L_2 = \left(\frac{2}{3} m_2 R_2^2 + m_2 R_1^2\right)\dot{\varphi} = \left(\frac{2}{3} m_2 R_2^2 + m_1 R_2 R_1\right)\dot{\varphi},$$

womit sich ein Gesamtdrehimpuls von

$$\begin{aligned} L_1 + L_2 &= \left(\frac{2}{3} m_1 R_1^2 + \frac{2}{3} m_2 R_2^2 + M R_1 R_2\right)\dot{\varphi} = \left(\frac{2}{3} m_1 R_1^2 + \frac{2}{3} m_2 R_2^2 + \frac{m_1 m_2}{M} R_S^2\right)\dot{\varphi} \\ &= \left(\frac{2}{3} m_1 \left(R_S - R_2\right)^2 + \frac{2}{3} m_2 \left(R_S - R_1\right)^2 + \mu R_S^2\right)\dot{\varphi} \end{aligned}$$

ergibt. Dabei ist

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 m_2}{M}$$

die reduzierte Masse. Durch weitere Umformungen gelangen wir schließlich zu dem Ausdruck

$$\begin{aligned} L &= \left(\frac{2}{3} m_1 \left(R_S^2 - 2R_S R_2 + R_2^2\right) + \frac{2}{3} m_2 \left(R_S^2 - 2R_S R_1 + R_1^2\right) + \mu R_S^2\right)\dot{\varphi} \\ &= \left(\frac{2}{3}\left(m_1 + m_2\right) R_S^2 - \frac{4}{3}\left(m_1 R_2 + m_2 R_1\right) R_S + \frac{2}{3} m_1 R_2 \left(R_2 + R_1\right) + \mu R_S^2\right)\dot{\varphi} \\ &= \left(\frac{2}{3} M R_S^2 - \frac{4}{3}\left(m_1 R_2 + m_2 R_1\right) R_S + \frac{1}{3}\left(m_1 R_2 + m_2 R_1\right) R_S + \mu R_S^2\right)\dot{\varphi} \\ &= \left(\frac{2}{3} M - \frac{m_1 R_2 + m_2 R_1}{R_S} + \mu\right) R_S^2 \dot{\varphi} = \left(\frac{2}{3} M - 2M \frac{R_1 R_2}{R_S^2} + \mu\right) R_S^2 \dot{\varphi}, \end{aligned}$$

den wir nach Ersetzen der Radien- durch die Massenverhältnisse in das endgültige Ergebnis

$$L = \left(\frac{2}{3} M - 2\frac{m_1 m_2}{M} + \mu\right) R_S^2 \dot{\varphi} = \left(\frac{2}{3} M - 2\mu + \mu\right) R_S^2 \dot{\varphi} = \frac{2}{3} M R_S^2 \dot{\varphi} - \mu R_S^2 \dot{\varphi}$$

überführen können. Da sich die Drehimpulse

$$L_1 = \left(\frac{2}{3} m_1 R_1^2 + m_1 R_2^2\right)\dot{\varphi} \quad \text{und} \quad L_2 = \left(\frac{2}{3} m_2 R_2^2 + m_2 R_1^2\right)\dot{\varphi}$$

auf eine gemeinsame Achse durch den Schwerpunkt beziehen, der Gesamtdrehimpuls jedoch nicht, müssen wir diesen „Fehler“ korrigieren und den Steinerschen Versatz, der sich in der reduzierten Masse ausdrückt, wieder addieren. Damit ergibt sich der konstante Gesamtdrehimpuls zu

$$\frac{2}{3} M R_S^2 \dot{\varphi} = L_1 + L_2 + \mu R_S^2 \dot{\varphi} = \left(\frac{2}{3} m_1 R_1^2 + m_1 R_2^2\right)\dot{\varphi} + \left(\frac{2}{3} m_2 R_2^2 + m_2 R_1^2\right)\dot{\varphi} + \mu R_S^2 \dot{\varphi},$$

qed

In der folgenden Abbildung sind alle drei Beiträge zum konstanten Trägheitsmoment der zu fusionierenden Schwarzen Löcher graphisch dargestellt. Wie man sieht, ist der Gesamtdrehimpuls unabhängig vom jeweiligen Wert der reduzierten Masse. Ihn irritieren die jeweiligen Massen der beiden Schwarzen Löcher nicht, egal wie diese sich verteilen.

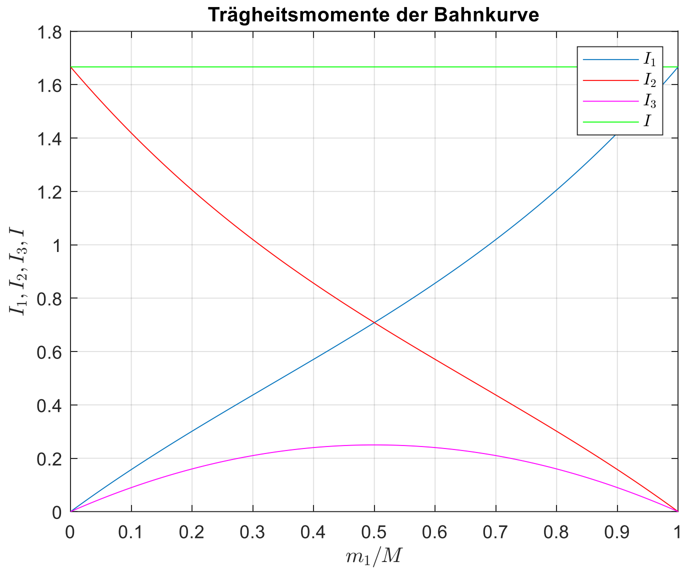

Abbildung 1. Trägheitsmomente zur Drehimpulsaddition

Im Anhang findet sich ein kurzes Programm zur Berechnung der Trägheitsmomente. Für die Gesamtmasse und den Schwarzschildradius wurden willkürlichen Maßeinheiten gewählt, da es uns hier lediglich darauf ankommt, die Konstanz nachzuweisen.

Anhang

```
% blackholefusion
clear all

M = 1;
RS = 1;
n = 101;

for i=1:n
   m1(i) = (i-1)*M/(n-1);
   m2(i) = M - m1(i);
   mu(i) = m1(i)*m2(i)/(m1(i) + m2(i));
   R1(i) = (i-1)*RS/(n-1);
   R2(i) = RS - R1(i);
   J1(i) = 2/3*m1(i)+R1(i)^2 + m1(i)*R2(i)^2;
   J2(i) = 2/3*m2(i)+R2(i)^2 + m2(i)*R1(i)^2;
   J3(i) = mu(i)*RS^2;
```



```
    J(i) = J1(i) + J2(i) + J3(i);
end

plot(m1,J1)
xlabel('$m_{1}/M$','interpreter','latex')
ylabel('$I_{1}, I_{2}, I_{3}, I$','interpreter','latex');
hold on
plot(m1,J2,'r')
hold on
plot(m1,J3,'m')
hold on
plot(m1,J,'g')
title('Trägheitsmomente der Bahnkurve');
grid on
legend('$I_{1}$','$I_{2}$','$I_{3}$','$I$','interpreter','latex');
```